Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой радиофизики,
профессор
____________Якубов В.П.
________ _____1997г.

ВЗАИМОСВЯЗЬ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

Методические указания

Томск 1997

РАССМОТРЕНЫ и УТВЕРЖДЕНЫ методической комиссией
радиофизического факультета
Протокол№_____от______1997г.

Председатель методкомиссии радиофизического
факультета, доцент Г.М.Дейкова

Методические указания разработаны для студентов радиофизического факультета и включают краткие теоретические сведения о свойствах, взаимосвязи и применении спектральных представлений, основанных на интегральном преобразовании Фурье и его конечном дискретном аналоге. Акцентируется внимание на свойствах спектральной плотности, явлении Гиббса, теореме отсчетов Котельникова

Составители: В.П.Беличенко
В.П.Якубов

Одним из основных инструментов современной радиофизики является непрерывное (интегральное) преобразование Фурье (НПФ). Именно это преобразование лежит в основе метода комплексных амплитуд и теории аналитических сигналов. При цифровом анализе полей и сигналов в прикладных разделах обработки информации широко используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ), допускающее реализацию в виде эффективного алгоритма, известного как быстрое преобразование Фурье (БПФ). Свойства НПФ и ДПФ подробно рассмотрены в соответствующей учебной и научной литературе [1,2]. Несмотря на существующее большое подобие свойств НПФ и ДПФ, они несколько отличаются и обычно излагаются в разной литературе. Взаимный переход от одного преобразования к другому сопряжен с некоторыми погрешностями и требует определенной осторожности. В учебно-методической литературе образовался методологический пробел в изложении связанных с этим аспектов.

На радиофизическом факультете теория НПФ изучается в курсах "Методы математической физики", "Статистическая радиофизика" и др. Свойства и применения ДПФ рассматриваются в курсах "Математическое моделирование на ЭВМ" и "Цифровой спектральный анализ сигналов и полей". Эти курсы изучаются в разных семестрах при несколько разном теоретической подходе. Данные методические указания имеют своей целью устранить существующий методологический разрыв и облегчить процесс изучения студентами современных методов спектрального анализа.

1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Спектральной плотностью или спектральной характеристикой непериодического сигнала, заданного функцией $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, называется функция параметра (частоты) f

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi ft} dt, \quad -\infty < f < \infty. \qquad (1)$$

Функции $x(t)$ и $X(f)$ связаны также формулой обращения

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-i2\pi ft} df, \quad -\infty < t < \infty. \qquad (2)$$

Они могут принимать комплексные значения. Формулами (1) и (2) определяются прямое и обратное преобразования Фурье, выражающие взаимно-однозначное соответствие между функцией-оригиналом $x(t)$ и функцией-изображением $X(f)$.

Степень гладкости спектральной плотности $X(f)$ существенно зависит от поведения оригинала $x(t)$ при $t \to \pm\infty$. Если функция $x(t)$ только абсолютно интегрируема, то $X(f)$ просто непрерывна, но может оказаться недифференцируемой. При убывании $x(t)$ на бесконечности по степенному закону t^{-n} функция $X(f)$ дифференцируема $(n-1)$ раз. При экспоненциальном (т.е. еще более быстром) убывании $x(t)$, допустимо аналитическое продолжение $X(f)$ в некоторую полосу комплексной плоскости f. Наконец, если $x(t)$ тождественно равна нулю при $-\infty < t < 0$, то $X(f)$ является аналитической в верхней полуплоскости f-плоскости [1]. Перечисленные свойства играют существенную роль при представлении сигналов на плоскости комплексной частоты [2].

Уместно подчеркнуть также следующее обстоятельство. Если функция $x(t) \in \mathrm{L}(-\infty, \infty)$, т.е. классу абсолютно интегрируемых на всей числовой прямой $-\infty < t < \infty$ функций, то спектральная плотность $X(f)$ будет непрерывной функцией, причем $X(\pm\infty) = 0$. Однако в общем случае отмеченных двух свойств спектральной плотности $X(f)$ недостаточно для того, чтобы определенный по формуле (2) оригинал $x(t)$ обязательно оказался абсолютно интегрируемой функцией. Для физических приложений подходящим является класс $L_2(-\infty, \infty)$ функций-оригиналов $x(t)$, т.е. таких функций, для которых существует $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$. Оказывается, что если $x(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, то и спектральная плотность $X(f) \in L_2(-\infty, \infty)$ и наоборот. В теории преобразования Фурье для функций $x(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ доказывается равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df .$$

Физический смысл этого равенства заключается в том, что энергия сигнала $x(t)$ равна интегралу от энергий всех его спектральных компонент. Иными словами равенство Парсеваля выражает закон сохранения энергии во временной и частотной областях. При этом принадлежность сигнала $x(t)$ классу $L_2(-\infty, \infty)$ гарантирует конечность его энергии, что обязательно должно выполняться для всякого физически реализуемого сигнала.

Из представления (1) видно, что только в случае гипотетического (существующего бесконечно долго) сигнала $x(t)$ его спектральная плотность $X(f)$ является функцией только частоты f. Ограничение интервала интегрирования по времени, отвечающее физической реальности процессов только конечной длительности, обусловливает зависимость спектральной плотности не только от частоты, но и от интервала наблюдения.

2. ИСКАЖЕНИЯ СПЕКТРА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОНЕЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Наблюдение всякого физического процесса возможно только в пределах ограниченного временного интервала. Как правило это ограничение моделируется с помощью прямоугольной весовой функции w(t)-прямоугольного окна. Это означает, что в случае сигнала $x(t)$, заданного на интервале $-\infty < t < \infty$ и характеризуемого спектральной плотностью $X(f)$, при ограничении временного интервала $(-T/2 < t < T/2)$, наблюдается на самом деле сигнал $w(t)x(t)$. Его спектральная плотность

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)x(t)e^{i2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} W(f-f')X(f')df' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\pi(f-f')T}{\pi(f-f')} X(f')df'$$

представляет собой свертку $X(f)$ с функцией $\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$, что приводит к искажению спектра. С увеличением T функция $\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$ становится все более сосредоточенной в окрестности точки f =0, но при этом неизменным сохраняется значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} df = 1,$$

что приводит при $T \to \infty$ к предельному значению $X_1(f) = X(f)$.

Искажения, обусловленные конечностью временного интервала наблюдения сигнала принято называть растеканием спектра. За счет растекания спектра, во-первых, снижается точность измерения спектральных компонент сигнала и, во-вторых, могут появиться погрешности вследствие слияния энергий смежных гармоник сигнала, охватываемых полосой частот функции $\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$. Для уменьшения погрешностей следует выбирать значение T в несколько раз, по крайней мере, большим периода самой низкочастотной спектральной компоненты сигнала.

3. ВЗАИМОСВЯЗЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО И КОНЕЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

Условимся подразумевать под дискретизацией сигнала $x(t)$ аналитическое его представление с помощью совокупности отсчетов в дискретные моменты времени $t = n\Delta t, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Пусть сигнал $x(t)$ дискретизован с частотой $F = 1/\Delta t$. С использованием обратного преобразования Фурье (2) можно записать

$$x(n\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-i2\pi f n\Delta t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-i2\pi f n/F} df .$$

Далее, последний интеграл представим в виде бесконечной суммы интегралов по интервалам длиной F, затем каждый член суммы сведем к интегралу по отрезку ($0, F$), изменим порядок суммирования и интегрирования и используем свойство периодичности экспоненциальной функции:

$$e^{-i2\pi(f+mF)n/F} = e^{-i2\pi f n/F} .$$

В результате получим

$$x(n\Delta t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{mF}^{(m+1)F} X(f) e^{-i2\pi f n/F} df =$$

$$= \int_0^F \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + mF) \right] e^{-i2\pi f n/F} df = \int_0^F X_F(f) e^{-i2\pi f n/F} df . \quad (3)$$

Функция

$$X_F(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + mF) \quad (4)$$

называется спектральной плотностью дискретизованного сигнала [2] . Как видно из (4) она имеет периодическую структуру с периодом на оси частот, равным F . Поскольку функция $X_F(f)$ является периодической, то она может быть представлена разложением в ряд Фурье. Из (3) вытекает, что коэффициенты этого разложения совпадают с $x(n\Delta t)$ (с точностью до множителя $1/F$). Следовательно

$$X_F(f) = \frac{1}{F}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) e^{i2\pi fn\Delta t}. \quad (5)$$

Соотношение (5) называется "бесконечным" дискретным преобразованием Фурье.

При выполнении условий теоремы отсчетов (теоремы Котельникова [2]) операции дискретизации и восстановления сигнала $x(t)$ взаимно обратимы. Согласно этой теореме, если наивысшая частота в спектре сигнала $x(t)$ меньше, чем $f_{\max}$, то сигнал $x(t)$ полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, отстоящие друг от друга не более чем на $\dfrac{1}{2f_{\max}}$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2f_{\max}}\right)\frac{\sin\omega_{\max}(t - n/2f_{\max})}{\omega_{\max}(t - n/2f_{\max})}, \omega_{\max} = 2\pi f_{\max}.$$

При правильном выборе шага дискретизации непрерывного сигнала его спектральная плотность может быть точно воспроизведена только в полосе частот до $f_{\max}$. В противном случае все составляющие спектра с частотами $f > f_{\max}$ окажутся перенесенными в частотный интервал $(0, f_{\max})$. Это явление известно как эффект наложения (неразличимости) частот и приводит к искажению спектральной плотности $X(f)$ исходного сигнала $x(t)$. Это объясняется тем, что при дискретизации сигнала с ограниченным (финитным) спектром, спектр $X_F(f)$ дискретизованного сигнала оказывается периодическим (см. (4)), образованным спектром $X(f)$ и бесконечной последовательностью его копий. Копии спектра перекрываются при неправильном выборе частоты дискретизации и не перекрываются в случае правильного выбора этой частоты.

Особую тщательность необходимо соблюдать при выборе шага дискретизации сигнала с резкими перепадами уровня или с круто-нарастающими фронтами, т.к. в этом случае случайные ошибки при дискретизации сигнала порождают в спектральной плотности помеху или целиком являющуюся белым шумом, или содержащую компоненту белого шума. Вследствие этого при $f \to \infty$ спектральная плотность $X(f)$ стремится не к нулю, а к некоторой константе, зависящей от уровня белого шума. Иными словами, высокочастотные составляющие спектра чрезвычайно сильно реагируют даже на очень малые ошибки при дискретизации сигнала. Понизить роль высоких частот и, тем самым, уменьшить нереальные флуктуации сигнала при его восстановлении можно с помощью метода σ -множителей Ланцоша или метода средних арифметических частичных сумм Фейера [5]. Однако гораздо более эффективен алгоритм, основанный на методе регуляризации Тихонова[5].

С другой стороны, если по найденной спектральной плотности начать восстанавливать сигнал с использованием формулы (3), то могут возникнуть большие погрешности, обусловленные явлением, родственным явлению Гиббса. Как известно [2], суть явления Гиббса состоит в том, что при вычислении рядов или интегралов Фурье в окрестности точек разрыва представляемых ими функций, последние не удается вычислить с точностью большей, чем 18% от величины разрыва функции, даже если просуммировать сколь угодно большое число членов ряда или вычислить интеграл со сколь угодно высокой точностью.

Для осуществления цифровой обработки требуется дискретизация сигнала не только во временной области, но и в частотной области. Это подразумевает представление сплошного спектра $X_F(f)$ совокупностью своих значений $X_F(k\Delta f)$ на дискретной сетке частот $f = k\Delta f$. Выполним выборку значений $X_F(f)$ в N точках, равномерно размещенных между 0 и F. Тогда используя формулу (5) и условие периодичности, фигурирующих в ней экспоненциальных функций, получим

$$X_F(k\Delta f) = \frac{1}{F}\sum_{n=0}^{N-1} x_T(n\Delta t)e^{i\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1,$$

где функция

$$x_T(n\Delta t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t + mT)$$

является периодической с периодом $T = N\Delta t = 1/\Delta f$.

Полученное выражение называется конечным дискретным преобразованием Фурье. Аргументы $k\Delta f$ и $n\Delta t$ обычно просто обозначают через k и n, а индексы F и T опускают. Тогда это преобразование запишется в виде

$$X(k)=\frac{1}{F}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{i\frac{2\pi}{N}nk},\quad k=0,1,\ldots,N-1. \qquad (6)$$

Обратное конечное дискретное преобразование Фурье проще всего получается с использованием свойства дуальности прямого (1) и обратного (2) преобразований Фурье. Основываясь на формуле (6) можно получить [2] следующее выражение для обратного конечного дискретного преобразования Фурье

$$x(n)=\frac{F}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{-i\frac{2\pi}{N}nk},\quad n=0,1,\ldots,N-1.$$

Вне интервала $0\le n\le N-1$ это преобразование определяет периодическое продолжение результата дискретизации $x(n\Delta t)$ исходного сигнала $x(t)$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ

1. Физический смысл равенства Парсеваля ?
2. Суть явления Гиббса ?
3. В чем заключается основное отличие спектральных плотностей непрерывных и дискретизованных сигналов ?
4. К чему приводит эффект наложения частот ?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Воспользовавшись формулой (5) получить выражение для $X_F(k\Delta f)$.
2. С использованием прямого преобразования Фурье (1) получить формулу для обратного конечного дискретного преобразования Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 256 с.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.

3. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979. 416 с.
4. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1990. 256 с.
5. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы (Справочное пособие).Киев: Наукова думка, 1986, 544с.

ВЗАИМОСВЯЗЬ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ. Методические указания/ Томский государственный университет-Томск, 1997-10с.

Подп. в печать Тираж экз. Бесплатно

З

аказ № УОП ТГУ, Томск, Никитина, 4