

Г Л А В А I.

Простейшие формы движений электрона.

1. Уравнения движения электрона. Электрический заряд, движущийся в электромагнитном поле, испытывает силу, выражающуюся следующим образом:

$$F_x = e \left[E_x + \frac{1}{c} (\dot{y}H_z - \dot{z}H_y) \right],$$

$$F_y = e \left[E_y + \frac{1}{c} (\dot{z}H_x - \dot{x}H_z) \right],$$

$$F_z = e \left[E_z + \frac{1}{c} (\dot{x}H_y - \dot{y}H_x) \right],$$

где F_x, F_y, F_z означают компоненты силы по трем осям прямо угольной системы координат, E_x, E_y, E_z — компоненты электрического, H_x, H_y, H_z — компоненты магнитного поля, e — величину заряда электрона, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — компоненты скорости электрона, c — скорость света.

Точками над буквами в дальнейшем всегда будут обозначаться производные по времени, так что

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ и т. д.}$$

и аналогично для двух других координат.

Кроме того, будут всегда применяться следующие обозначения:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

r^2 — квадрат радиуса-вектора мгновенного положения электрона

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2;$$

v^2 — квадрат его скорости,

$$T = \frac{mv^2}{2};$$

T — его кинетическая энергия. (Массу m электрона мы будем сначала рассматривать как постоянную, т. е. будем изучать движения со скоростями, не слишком приближающимися к скорости света).

Уравнения движения электрона будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= e \left[E_x + \frac{1}{c} (\dot{y}H_z - \dot{z}H_y) \right], \\ m\ddot{y} &= e \left[E_y + \frac{1}{c} (\dot{z}H_x - \dot{x}H_z) \right], \\ m\ddot{z} &= e \left[E_z + \frac{1}{c} (\dot{x}H_y - \dot{y}H_x) \right], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если ввести электростатический потенциал φ , то компоненты электрического поля выразятся так:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Умножая уравнение (1) последовательно на \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} и складывая, получаем:

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = e(E_x\dot{x} + E_y\dot{y} + E_z\dot{z}).$$

Принимая во внимание (2), можно вместо этого написать

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = -\frac{d}{dt} e\varphi$$

или, интегрируя:

$$\frac{mv^2}{2} + e\varphi = \text{Constans}. \quad (3)$$

Это уравнение энергии, по которому полная энергия электрона — составляющаяся из кинетической и электростатической, постоянна. Магнитное поле не входит в это уравнение. Действительно, магнитное поле, действуя на электрон в направлении, перпендикулярном его скорости, не совершает работы. В отсутствие электростатических сил уравнение принимает вид:

$$\frac{mv^2}{2} = \text{Constans},$$

то-есть электрон движется с постоянной скоростью.

2. Однородное электрическое поле. Если электрон находится в однородном электростатическом поле, направленном по оси x -ов, то уравнения (1) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= eE_x, \\ m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где E_x — величина постоянная. Уравнения эти, как известно, определяют параболический путь электрона. Первые интегралы дают:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{eE_x}{m} t + \dot{x}_0, \\ \dot{y} &= \dot{y}_0, \\ \dot{z} &= \dot{z}_0,\end{aligned}\tag{5}$$

где $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ означают компоненты скорости в момент $t=0$. Вторые интегралы

$$\begin{aligned}x &= \frac{eE_x}{2m} t^2 + \dot{x}_0 t + x_0, \\ y &= \dot{y}_0 t + y_0, \\ z &= \dot{z}_0 t + z_0.\end{aligned}\tag{6}$$

При $t=0$ электрон находится в точке x_0, y_0, z_0 .

Ось параболы параллельна оси x -ов. Момент прохождения электрона через вершину параболы определяется из условия

$$\dot{x} = 0$$

что согласно первому из равенств (5) дает

$$t = -\frac{m\dot{x}_0}{eE_x}.$$

Координаты вершины получатся, если это значение для t подставить в равенства (6).

Исключая t из двух последних равенств (6), находят, что парабола лежит в плоскости

$$\frac{y - y_0}{y_0} = \frac{z - z_0}{z_0}$$

параллельной оси x -ов.

Если начальная скорость параллельна оси y -ов и движение начинается в начале координат, имеем $x_0 = y_0 = z_0 = \dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0$,

$$\begin{aligned}x &= \frac{eE_x}{2m} t^2, \\ y &= \dot{y}_0 t, \\ z &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Поставив экран перпендикулярно к оси y -ов на расстоянии $y=a$ от начала координат, можно измерить отклонение на экране точки удара электрона от той точки, где экран встречается с осью y -ов. Пусть это отклонение обозначено через b (Рис. 1). Тогда два первые равенства (7) дадут

$$\begin{aligned}b &= \frac{eE_x}{2m} t^2, \\ a &= \dot{y}_0 t,\end{aligned}$$

где t обозначает момент встречи электрона с экраном. Исключая t из этих равенств, находим

$$\frac{m}{e} \dot{y}_0^2 = \frac{E_x a^2}{2b}. \quad (8)$$

Здесь справа стоят величины, поддающиеся непосредственному измерению. Следовательно, измерение отклонения электрона в однородном электростатическом поле дает возможность определить величину частного от деления квадрата его начальной скорости \dot{y}_0 на отношение заряда электрона e к его массе m .

3. Однородное магнитное поле. Если мы предположим, что электрон движется под действием одних магнитных сил, то уравнения движения его будут

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c} (\dot{y} H_z - \dot{z} H_y), \\ m\ddot{y} &= \frac{e}{c} (\dot{z} H_x - \dot{x} H_z) \quad (9) \\ m\ddot{z} &= \frac{e}{c} (\dot{x} H_y - \dot{y} H_x). \end{aligned}$$

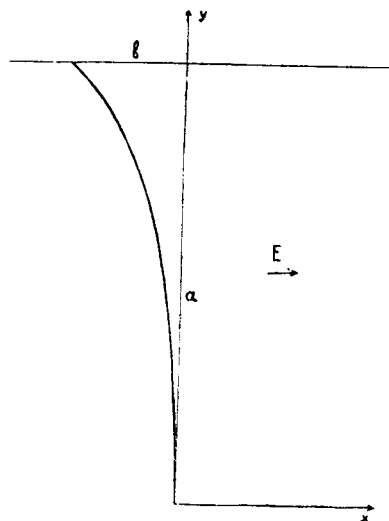


Рис. 1.

Умножая эти уравнения по очереди на \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} и складывая результаты, найдем справа тождественно нуль, так что получим:

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{dT}{dt} = 0,$$

или

$$T = \text{Const}. \quad (10)$$

Электрон движется с постоянной кинетической энергией, или постоянной абсолютной скоростью v . Это объясняется тем, что магнитная сила, действуя постоянно перпендикулярно к направлению движения электрона, изменяет лишь направление его скорости, не влияя на ее абсолютную величину. Этот результат относится ко всякому магнитному полю и предполагает только, что кроме магнитных на электрон не действуют никакие иные силы.

Если магнитное поле однородно и направлено по оси z -ов, то уравнения (9) примут вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c} \dot{y}H_z, \\ m\ddot{y} &= -\frac{e}{c} \dot{x}H_z, \\ m\ddot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя один раз эти уравнения, находим

$$\begin{aligned} m\dot{x} &= \frac{e}{c} yH_z + \alpha, \\ m\dot{y} &= -\frac{e}{c} xH_z + \beta, \\ m\dot{z} &= \gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Возводя обе стороны уравнения в квадрат, складывая и принимая во внимание постоянство скорости v , находим, что электрон движется по круговому цилиндру, уравнение которого

$$m^2v^2 = \left(\frac{eH_z}{c}y + \alpha\right)^2 + \left(-\frac{eH_z}{c}x + \beta\right)^2 + \gamma^2. \quad (12)$$

Образующие этого цилиндра параллельны оси z -ов. Радиус его основания равен

$$R = c \frac{\sqrt{m^2v^2 - \gamma^2}}{eH_z} \quad (13)$$

а координаты его оси (Рис. 2)

$$x = \frac{\beta c}{eH_z},$$

$$y = -\frac{\alpha c}{eH_z}.$$

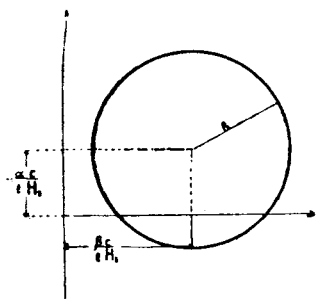


Рис. 2.

Постоянные α , β , γ определяются, как видно из равенства (11), по заданным начальным координатам и скоростям электрона. Последняя из этих величин равна постоянной компоненте импульса электрона параллельной оси z -ов. Постоянная компонента скорости в этом направлении равна $\frac{\gamma}{m}$.

Равенство (13), определяющее радиус цилиндра, может быть написано

$$R = \frac{cm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{eH_z}. \quad (14)$$

Корень, стоящий в числителе, равен проекции скорости на плоскость $xу$ -ов. Эта проекция может быть представлена в виде

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\omega,$$

где ω угловая скорость обращения электрона около оси цилиндра. Из (14) следует

$$\omega = \frac{eH_z}{ct}.$$

Угловая скорость, таким образом, тоже постоянна.

Если в начальный момент задать электрону движение в плоскости $xу$ -ов, то он не выйдет из этой плоскости и в дальнейшем движении. В уравнении (12) будет $\gamma = 0$. Электрон будет двигаться по кругу радиуса

$$R = \frac{mcv}{eH_z}.$$

Отсюда видно, что, измеряя радиус круга, по которому движется электрон в плоскости, перпендикулярной к направлению однородного магнитного поля, можно найти величину

$$\frac{mv}{e}.$$

Отклонение электрона однородным электрическим полем определяет, как мы видим в (8), значение величины

$$\frac{mv^2}{e}.$$

Делением этой величины на предыдущую можно найти скорость v , а затем и отношение заряда к массе $\frac{e}{m}$. Таким образом,

эти две важные величины определяются комбинированием наблюдения в электрическом и магнитном полях. Чтобы быть уверенным, что наблюдается одна и та же частица, обладающая определенной скоростью, нужно подвергать ее действию обоих полей одновременно. Поэтому сейчас мы рассмотрим характер движения при одновременном действии обоих полей.

4. Взаимно-перпендикулярные электрическое и магнитное поля. Разберем сначала случай, когда электрическое и магнитное поля взаимно-перпендикулярны и задана начальная скорость, лежащая в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Тогда все движение будет протекать в этой плоскости. Если магнитная сила направлена по

оси z -ов, а электрическая — по оси x -ов, то дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= eE_x + \frac{eH_z}{c}\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= -\frac{eH_z}{c}\dot{x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножая обе стороны соответственно на \dot{x} , \dot{y} , складывая и интегрируя по времени, получаем интеграл энергии

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - eE_x x = \varepsilon. \quad (16)$$

Здесь $(-eE_x x)$ есть потенциальная энергия электрона в электростатическом поле, а ε — его постоянная в течение всего движения полная энергия. Интегрируя уравнения (15) по времени, находим

$$\begin{aligned} m\dot{x} &= eE_x t + \frac{eH_z}{c}y + \alpha \\ m\dot{y} &= -\frac{eH_z}{c}x + \beta \end{aligned} \quad (17)$$

Возводя обе стороны в квадрат и принимая во внимание (16), найдем уравнение траектории в таком виде:

$$2m(\varepsilon + eE_x x) = \left(\frac{eH_z}{c}x - \beta\right)^2 + \left(\frac{eH_z}{c}y + eE_x t + \alpha\right)^2. \quad (18)$$

Оно приводится к виду

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

если положить для сокращения

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{eH_z} \left(\beta + \frac{mcE_x}{H_z} \right) &= a, \\ -\frac{c}{eH_z} \left(eE_x t + \alpha \right) &= b, \\ \frac{2mc^2}{e^2 H_z^2} \left(\varepsilon + \frac{\beta c E_x}{H_z} + \frac{mc^2 E_x^2}{2H_z^2} \right) &= R^2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Эти равенства показывают, что электрон лежит на окружности круга радиуса R , центр которого движется равномерно поступательно со скоростью $\left(-\frac{cE_x}{H_z}\right)$ параллельно оси y -ов, находясь на расстоянии a от оси x -ов. Следовательно, хотя элек-

трическая сила и действует на электрон в направлении отрицательной оси x -ов (ввиду того, что заряд электрона отрицательный), он в среднем несколько не переместится в этом направлении, а будет удаляться в направлении перпендикулярном как к магнитной, так и к электрической силе, а именно в направлении отрицательной оси y -ов. Скорость перемещения оказывается пропорциональной электрической силе E_x и обратно пропорциональной магнитной H_z .

Если положить для $t = 0$

$$x = y = 0,$$

то по (17) α и β имеют значения начальных импульсов электрона по обеим осям координат.

Последнее из равенств (19) показывает, что радиус R зависит от компоненты начальной скорости по оси y -ов.

Траектория заключена в полосе между прямыми

$$x = a \pm R,$$

которых она касается по очереди. Полагая, что такое касание происходит в момент $t = 0$, мы положим $x_0 = 0$. Тогда имеем

$$\alpha = 0, \quad \beta = m\dot{y}_0, \quad \varepsilon = \frac{m}{2} \dot{y}_0^2.$$

Равенства (19) принимают вид

$$\begin{aligned} a &= R = \frac{mc}{eH_z} \left(\dot{y}_0 + \frac{cE_x}{H_z} \right), \\ b &= -\frac{cE_x}{H_z} t. \end{aligned} \tag{20}$$

Чтобы найти угловую скорость обращения электрона по перемещающейся окружности, можно положить

$$\begin{aligned} x &= R(1 - \cos \Theta), \\ y &= -\frac{eE_x}{H_z} t + R \sin \Theta, \end{aligned} \tag{21}$$

где Θ есть неизвестная функция от времени, и подставить это выражение в уравнения (15). Найдем тогда

$$\Theta = \frac{eH_z}{mc} t. \tag{22}$$

Угловая скорость электрона постоянна и имеет то же самое значение, которое мы нашли в предыдущем параграфе для случая движения по неподвижной окружности под действием

одного магнитного поля. Равенства (21) и (22) показывают, что электрон движется по циклоиде. Форма ее при заданных значениях E_x и H_z зависит от величины \dot{y}_0 . Так как заряд e отрицателен, первые из формул (20) показывают, что a и R отрицательны при $\dot{y}_0 > -\frac{cE_x}{H_z}$ и положительны при $\dot{y}_0 < -\frac{cE_x}{H_z}$.

В первом случае движение происходит на нашем чертеже (Рис. 3) слева от оси y -ов, в последнем—справа. При $\dot{y}_0 > 0$ имеем удлиненную циклоиду, при $\dot{y}_0 = 0$ — нормальную, при $0 > \dot{y}_0 > -\frac{cE_x}{H_z}$ — укороченную, лежащую слева. При $\dot{y}_0 = -\frac{cE_x}{H_z}$ имеем прямолинейное движение. В этом случае магнитная и электрическая сила оказывают на электрон действия взаимно уничтожающиеся. Его постоянная скорость в этом случае как

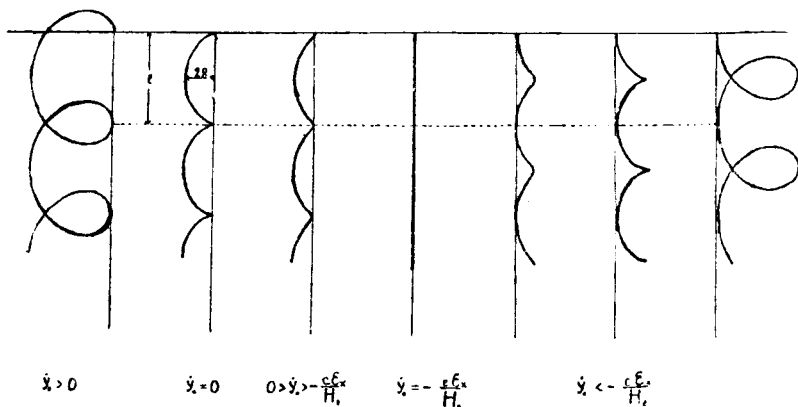


Рис. 3.

раз равна скорости перемещения центра окружности, по которой он двигался бы при произвольной начальной скорости. При дальнейшем убывании \dot{y}_0 траектория переходит на правую сторону от оси y -ов, причем повторяются в обратном порядке те же формы циклоид: сначала укороченная, затем нормальная и, наконец, удлиненная. Лежат они, как показано на рисунке, всегда обращая сторону большей кривизны вправо. Расстояние l между двумя последовательными вершинами циклоиды равняется отношению постоянной скорости перемещения центра круга к угловой скорости, умноженному на 2π . Это дает

$$l = \frac{2\pi mc^2 E_x}{eH_z}$$

Эта длина не зависит от начальной скорости \dot{y}_0 . Измерив ее, можно бы непосредственно определить отношение $\frac{e}{m}$. Если име-

ются пучек электронов различных начальных скоростей, то все они будут двигаться по циклоидам одинаковой «длины волны».

5. Произвольно направленные однородные поля. Разобрав подробно движение в плоскости перпендикулярной к магнитному полю, когда электрическая сила лежит в этой же плоскости, мы можем, пользуясь найденными результатами, легко перейти и к самому общему случаю движения электрона под одновременным воздействием однородных электрических и магнитных полей.

Попрежнему полагаем ось z -ов параллельной магнитному полю. Направление других координатных осей выберем так, чтобы электрическая сила лежала в плоскости zx -ов, так что $E_y = 0$. Тогда координаты x и y электрона попрежнему будут определяться уравнениями (15) и вытекающими из них первыми интегралами (17). Для третьей же координаты будем, очевидно, иметь

$$m\ddot{z} = eE_z, \quad (23)$$

откуда

$$m\dot{z} = \frac{eE_z t}{2} + \gamma, \quad (24)$$

где γ — начальный импульс в направлении оси z -ов.

Полагая опять, что движение начинается в начале координат, имеем

$$mz = \frac{eE_z}{2} t^2 + \gamma t. \quad (25)$$

Движение в этом направлении происходит так, как если бы кроме компоненты E_z на электрон не действовали никакие другие силы. Из (15) и (23) обычным путем получается интеграл энергии

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e(E_x x + E_z z) = \varepsilon$$

В силу (24) и (25) можно написать

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - eE_x x = \varepsilon - \frac{\gamma^2}{2m}.$$

Поэтому проекция траектории электрона на плоскость xu -ов определится теми же равенствами (18) и (19), где только на место ε нужно подставить $\varepsilon - \frac{\gamma^2}{2m}$. Движение происходит на поверхности кругового цилиндра с образующими, параллельными магнитному полю, который перемещается с постоянной скоростью $\frac{cE_x}{H_z}$ в направлении отрицательных u -ов. Движение по оси цилиндра, характеризуется уравнением (25). Если начальная компонента скорости z_0 направлена обратно действию

компоненты силы E_z , скорость \dot{z} через некоторое время переменит знак. Траектория будет вообще иметь вид спирали, вьющейся около параболы, ось которой параллельна оси z -ов.

Если предположить, что начальный импульс лежит в плоскости yz -ов, то уравнениями траектории будут кроме (25) по-прежнему (21) и (22) со значением R , определяемым первым из равенств (20).

6. Поле точечного электрического заряда. Если электрон испытывает действие электрического заряда e' , находящегося в начале координат, то он описывает одно из конических сечений, форма и положение которого зависит как от знака заряда так и от начальных условий, определяющих движение. Во всех случаях заряд e' находится в одном из фокусов конического сечения.

Если мы возьмем за плоскость xy -ов плоскость, содержащую заряд e' и направление начальной скорости электрона, то, очевидно, все движение будет протекать в этой плоскости. Уравнения движения будут

$$m\ddot{x} = \frac{ee'x}{r^3}$$

$$m\ddot{y} = \frac{ee'y}{r^3}.$$

Умножая на \dot{x} , \dot{y} , складывая и интегрируя, найдем интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{ee'}{r} = \epsilon.$$

С другой стороны, умножая первое уравнение на \dot{y} , второе на \dot{x} и вычитая, найдем

$$m(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) = m \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = 0.$$

Отсюда интеграл площадей:

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C.$$

Вводя полярные координаты равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

получим интегралы энергии и площадей в виде:

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{ee'}{r} = \epsilon, \quad (26)$$

$$mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = C. \quad (27)$$

Исключая dt из этих равенств, найдем

$$\frac{C^2}{2m} \left[\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{ee'}{r} = \epsilon$$

или

$$C^2 \left[\left(d \left(\frac{1}{r} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right] + \frac{ee'}{r} = \varepsilon$$

откуда

$$d\varphi = \frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{\sqrt{\frac{2m\varepsilon}{C^2} - \frac{2mee'}{C^2} \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{r} \right)^2}}$$

Вводя обозначения

$$p = -\frac{C^2}{mee'}, \quad (28)$$

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon C^2}{me^2e'^2}},$$

можем переписать дифференциальное уравнение в виде

$$d\varphi = \frac{d \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)}{\sqrt{\frac{\eta^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2}}, \quad (29)$$

откуда интеграл для отрицательного значения корня

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \frac{p}{\eta} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right),$$

так что

$$\frac{p}{r} = 1 + \eta \cos(\varphi - \varphi_0),$$

или

$$r = \frac{p}{1 + \eta \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (30)$$

Положительный знак перед корнем (29) при соответственном выборе произвольной постоянной φ_0 приводит к тому же результату. Это, как известно, уравнение конического сечения, один из фокусов которого находится в начале координат.

Мы рассмотрим отдельно случаи притяжения и отталкивания электрона центральной силой. Первое будет иметь место, если e и e' разных знаков то есть для электрона при положительном знаке центрального заряда. Тогда согласно первому из равенств (28) p положительно. Согласно второму из равенств эксцентриситет η орбиты будет меньше единицы, равен ей или же больше ее, смотря по тому, будет ли постоянная энергия ε меньше нуля, равна нулю или же больше нуля. В первом случае орбита будет эллиптическая, во втором параболическая,

в последнем гиперболическая. Во всех случаях φ_0 соответствует перигелию электрона, т. е. точке, в которой радиус — вектор r имеет наименьшее значение; p — параметр конического сечения.

Большая полуось эллиптической орбиты равняется $\frac{ee'}{4\varepsilon}$ и таким образом, завися от этой энергии, не зависит от постоянной площадей C . Равным образом для гиперболической орбиты действительная полуось равна $\left(-\frac{ee'}{4\varepsilon}\right)$. Значение постоянных ε и C , а следовательно и форма траектории определяются начальными положением и скоростью электрона.

Пусть в начальный момент радиус-вектор имеет значение r_0 , скорость — v_0 , а b — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на направление начальной скорости, при чем мы условимся считать эту длину положительной, когда центр притяжения остается влево от направления начальной скорости, и отрицательной в обратном случае.

Подставляя эти величины в (26) и (27), найдем

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{ee'}{r_0} \\ C = mv_0 b \end{cases} \quad (31)$$

Знак постоянной C определяет направление обращения электрона около центра, при чем за положительное мы принимаем направление, обратное часовой стрелке. Так как абсолютное значение этой постоянной определяет удвоенную площадь покрываемую радиусом вектором в единицу времени, мы найдем, в случае эллиптической орбиты период обращения электрона около центра делением площади эллипса на $\frac{C}{2}$. Период этот окажется равным

$$\tau = \frac{\pi ee'}{4\sqrt{2m\varepsilon^{3/2}}} \quad (32)$$

Таким образом, период, как и большая ось, зависит только от энергии и не зависит от постоянной C .

Если заряды одноименны, т. е. имеет место отталкивание, p , согласно первому из равенства (28), отрицательно. Тогда в уравнении траектории (30) знаменатель тоже должен быть отрицательным. Для этого должно быть

$$\cos(\varphi - \varphi_0) < -\frac{1}{\eta}$$

Следовательно и в этом случае электрон движется по ветви гиперболы, но только лежит она иначе: в случае притяжения притягивающий центр находится в фокусе, прилежащем к ветви,

по которой движется электрон, в случае отталкивания, наоборот в более удаленном фокусе. Форма же гиперболы, то-есть значения действительной полуоси и эксцентриситета, не зависят от знака центрального заряда. (Рис. 4).

7. Рассеяние α -лучей. Изучение отклонений α -частиц от первоначального направления при прохождении через материю позволило Резерфорду разрешить коренной вопрос о распределении положительного заряда внутри атома. До работы Резерфорда, появившейся в 1911 году, считалась наиболее

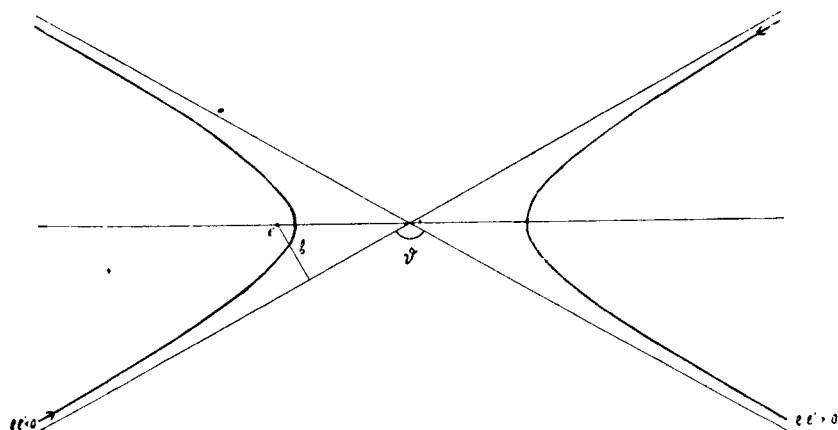


Рис. 4.

приближавшейся к действительности модель атома, предложенная Дж. Дж. Томсоном, который предполагал, что положительный заряд распределен по всему об'ему атома образуя положительную сферу, внутри которой находится известное число мелких отрицательных зарядов—электронов, нейтрализующих заряд положительной сферы. Когда α -частица, то-есть атом гелия, несущий два элементарных заряда положительного электричества, пронизывает такой атом, он должен испытывать известное отклонение от прямолинейного пути. Но отклонение это не может быть велико. Действительно, сильные электрические поля в этой модели имеются лишь по соседству с электронами, где между электроном и пролетающей α -частицей будет значительное притяжение. Но под действием этого притяжения α -частица отклонится лишь слабо, потому что масса ее примерно в 7400 раз больше массы электрона. Значительные отклонения могут получаться лишь путем накопления большого числа мелких отклонений, испытываемых при прохождении частиц через большое число атомов рассеивающего слоя. Однако и тут образование большого отклонения очень мало вероятно, потому что единичные мелкие отклонения будут иметь различные направления и будут

суммироваться по законам вероятности. Подсчет показывает, что по этой теории большие отклонения должны бы встречаться гораздо реже, чем это было найдено в действительности в опытах Гейгера и Марсдена¹⁾. Эти ученые изучали рассеяние α -частиц, излучаемых препаратом RaC или же эманации радия в равновесии с продуктами ее распада. В этих опытах диафрагмами D (Рис. 5) вырезывался пучок лучей радиоактивного препарата R , которые падали на рассеивающий слой изучаемого вещества F . Экран сернистого цинка Z , связанный с микроскопом M , мог вращаться по окружности около оси проходящей через рассеивающий слой. В микроскоп наблюдались сцинтилляции экрана, вызываемые падением на него отдельных α -частиц. Сосчитывались сцинтилляции, наблюдавшиеся в единицу времени, на единице поверхности экрана в зависимости

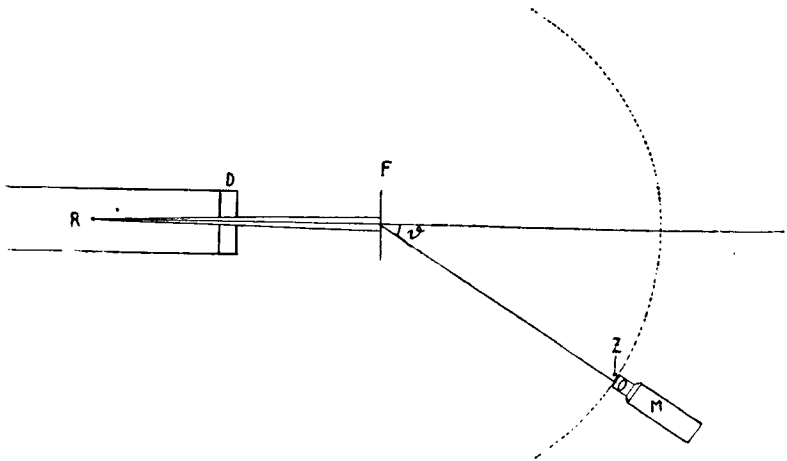


Рис. 5.

от угла φ , составляемого отклоненными лучами с их первоначальным направлением. При этом изучались также влияние толщины рассеивающего слоя, атомного веса, составляющего его вещества, а также — скорости α -частиц. Из пространства, в котором распространялись α -лучи, был, разумеется, выкачан воздух, чтобы он не задерживал и не рассеивал α -частиц. Изучение результатов этих опытов заставило Резерфорда²⁾ противопоставить вышеизложенной теории «многократного» рассеяния, по которой значительные отклонения являлись результатом наложения большого числа мелких отклонений, свою

¹⁾ *H. Geiger and E. Marsden, Proc. Roy. Soc. 82, p. 495, 1909. H. Geiger, Proc. R. y. Soc., 83, p. 492, 1910. H. Geiger and E. Marsden, Phil. Mag., 25, p. 604, 1913.*

²⁾ *E. Rutherford, Phil. Mag., 21, p. 669, 1913.*

теорию «однократного» рассеяния. Действительно, положение мелких отклонений могло давать в сумме отклонения большие лишь чрезвычайно редко, тогда как Гейер и Марсден наблюдали значительное число отклонений, превышающих 90° , т.-е. своего рода отражения частиц слоем вещества. Резерфорд логически заключил, что строение атома должно быть таково, чтобы при благоприятных условиях уже результатом единичного взаимодействия между атомом и пролетающей α -частицей могло быть отклонение на большой угол. Для этого внутри атома должно быть сильное поле, связанное с тяжелой массой. Отсюда возникло представление об атомном ядре в котором на очень малом пространстве сосредоточен весь положительный заряд атома, а также почти вся его масса. Такой характер ядра, действительно, подтвердился всеми дальнейшими опытами и положен в основу модели атома, предложенной Бором и разработанной далее Зоммерфельдом и другими.

Пользуясь формулами предыдущего параграфа, мы можем легко определить, насколько отклонится α -частица, попадая в соседство с атомным ядром, если только мы предположим, что масса ядра велика по сравнению с массой α -частицей, так, что можно считать ядро неподвижным. Это допущение будет тем ближе к истине, чем больше атомный вес рассеивающего вещества.

Так как заряды ядра и частицы оба положительны, траектория изобразится правой ветвью гиперболы на рис. 4. Угол отклонения ϑ —внешний угол между асимптотами. Из уравнения (30) видим, что он выразится так:

$$\vartheta = \pi - 2 \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\eta} \quad (33)$$

Чтобы выразить η через начальную скорость v_0 и перпендикуляр b из ядра на направление ее, нужно в (31) положить $r_0 = \infty$ и подставить найденные значения ε и C в (28). Получится

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{m^2 v_0^4 b^2}{e^2 e'^2}}$$

Подставляя в (33) и преобразуя, находим

$$\vartheta = 2 \operatorname{arcctg} \frac{m v_0^2 b}{e e'} \quad (34)$$

Если через Δ обозначим толщину рассеивающего слоя, а через n —число атомов, содержащихся в единице его объема, то вероятность того чтобы первоначальное направление частицы прошло от одного из ядер на расстоянии, лежащем между b и $b + db$, будет

$$2\pi n \Delta b db.$$

Но из (34) имеем

$$b = \frac{ee'}{mv_0^2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2},$$

$$db = \frac{ee'}{2mv_0^2} \cdot \frac{d\vartheta}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

Следовательно, из Q частиц, падающих в единицу времени на слой, число

$$\pi Q n \Delta \left(\frac{ee'}{mv_0^2} \right)^2 \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} \quad (35)$$

отклонится на угол, лежащий между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. Удовлетворяющие этому условию направления заполняют пространственный угол

$$2\pi \sin \vartheta d\vartheta. \quad (36)$$

Если экран Z стоит на расстоянии a от рассеивающего слоя то число частиц, попадающих на единицу его площади получится делением (35) на (36) и на a^2 , то-есть будет

$$\frac{Q n \Delta}{a^2} \left(\frac{ee'}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

Выражение это показывает что число падающих на экран частиц:

- 1) обратно пропорционально четвертой степени синуса половины угла отклонения,
- 2) прямо пропорционально толщине рассеивающего поля,
- 3) обратно пропорционально четвертой степени начальной скорости,
- 4) прямо пропорционально квадрату заряда ядра.

Первые три вывода хорошо подтвердились опытом. Четвертый же позволил сделать заключение об относительной величине зарядов ядер различных элементов. Получилась приблизительная пропорциональность между зарядом и атомным весом. Теперь мы знаем, что ядро содержит число элементарных зарядов, равное порядковому номеру элемента в периодической системе Менделеева, которое в свою очередь близко к половине атомного веса.

Действительная полуось описываемой частицей гиперболы— наименьшее расстояние, на которое она подходит к ядру. Величина эта легко определяется и дает некоторый верхний предел для величины ядра.

Точечный магнитный заряд. Предположим, что в начале координат находится изолированный магнитный полюс

силы μ . Правда, мы знаем, что изолированных магнитных полюсов в природе не существует, что всякий положительный магнитный заряд сопровождается равным ему отрицательным. Но последний может находиться от первого на столь значительном расстоянии, что в области непосредственно прилегающей к первому расположению магнитных силовых линий будет приблизительно таково, как если бы другой заряд совершенно отсутствовал. Так, если мы имеем длинный магнитный стержень, то около одного конца его влияние заряда, сосредоточенного на другом конце, не будет заметно.

Компоненты магнитного поля будут в этом случае п водными от магнитного потенциала φ , взятыми с обратным знаком, при чем φ имеет форму

$$\varphi = \frac{\mu}{r}$$

следовательно

$$H_x = \frac{\mu x}{r^3}, \quad H_y = \frac{\mu y}{r^3}, \quad H_z = \frac{\mu z}{r^3}$$

Уравнения движения электрона примут вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{y}z}{r^3} - \frac{\dot{z}y}{r^3} \right), \\ m\ddot{y} &= \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{z}x}{r^3} - \frac{\dot{x}z}{r^3} \right), \\ m\ddot{z} &= \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{x}y}{r^3} - \frac{\dot{y}x}{r^3} \right). \end{aligned} \tag{37}$$

Кроме имеющего место во всяком магнитном поле интеграла

$$\frac{mv^2}{2} = \text{Const},$$

найдем сейчас три других. Для этого умножаем последнее уравнение на y , второе на z и вычитаем результаты. Найдем

$$m \frac{d}{dt} (y\dot{z} - z\dot{y}) = \frac{e\mu}{c} \left[\frac{\dot{x}r^2 - x(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})}{r^3} \right] = \frac{e\mu}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right)$$

Интегрируя это равенство и два других, составленных для других пар уравнений (37) найдем интегралы

$$\left. \begin{aligned} m(y\dot{z} - z\dot{y}) - \frac{e\mu}{c} \frac{x}{r} &= C_x, \\ m(z\dot{x} - x\dot{z}) - \frac{e\mu}{c} \frac{y}{r} &= C_y, \\ m(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{e\mu}{c} \frac{z}{r} &= C_z. \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

Если введем компоненты секториальной скорости ω_x , ω_y , ω_z , положив

$$2\omega_x = y\dot{z} - z\dot{y} \text{ и т. д.}$$

и обозначим через α , β , γ косинусы углов, составляемых радиусом вектором с осями координат, то интегралы (38) напишутся

$$\left. \begin{aligned} 2m\omega_x - \frac{e\mu\alpha}{c} &= C_x, \\ 2m\omega_y - \frac{e\mu\beta}{c} &= C_y, \\ 2m\omega_z - \frac{e\mu\gamma}{c} &= C_z. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Вектор с компонентами C_x , C_y , C_z назовем для краткости неизменяемым вектором. Мы видим, что неизменяемый вектор представляет собой геометрическую разность между вектором момента количества движения и вектором, направление которого совпадает с направлением радиуса вектора, а абсолютная величина равна $\frac{e\mu}{c}$. Его легко построить, зная начальное положение и скорость электрона.

Умножая равенства (38) соответственно на $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ и складывая, найдем

$$C_x \frac{x}{r} + C_y \frac{y}{r} + C_z \frac{z}{r} = -\frac{e\mu}{c}. \quad (40)$$

Убеждаемся, что электрон движется по поверхности круглого конуса, вершина которого находится в начале координат, а ось параллельна неизменяемому вектору. Если обозначим через C абсолютную величину последнего, положив

$$C^2 = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2,$$

то для косинуса угла ϑ при вершине конуса будем, очевидно, иметь

$$\cos \vartheta = -\frac{e\mu}{cC} \quad (41)$$

Если обозначим через ω_c проекцию мгновенной секториальной скорости на направление неизменяемого вектора, то, умножая равенства (38) последовательно на $\frac{C_x}{C}$, $\frac{C_y}{C}$, $\frac{C_z}{C}$, складывая и принимая во внимание (40), найдем

$$2m\omega_c = C - \frac{e^2\mu^2}{C^2} = C\sin^2\vartheta \quad (42)$$

Электрон обращается около оси конуса с постоянной секториальной скоростью. Так как

$$2m\omega_c = m\rho^2\dot{\phi} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\phi},$$

где буквой ρ обозначен радиус поперечного сечения конуса, а через $\dot{\phi}$ угловая скорость обращения около оси конуса, то (42) обращается, очевидно, в

$$mr^2\dot{\phi} = C. \quad (43)$$

Это закон площадей в своеобразном, однако, видоизменении. Постоянна площадь, описываемая в единицу времени образующей конуса, на которой лежит электрон.

Если примем систему сферических координат r, ϑ, φ , ось которой совпадает с осью конуса, то в выражении кинетической энергии

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2) = \frac{m}{2} v^2 \quad (44)$$

второй член равен нулю. В третьем на место введем его значение из (43). После элементарных преобразований найдем

$$\frac{1}{2v} \frac{d(r^2)}{dt} = \sqrt{r^2 - \frac{C^2 \sin^2 \vartheta}{v^2 m^2}} \quad (45)$$

Если обозначим через b длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на направление скорости в момент $t = 0$, то по определению

$$C^2 = m^2 b^2 v^2 + \frac{e^2 \mu^2}{c^2}$$

С другой стороны, согласно (42)

$$C^2 \sin^2 \vartheta = C^2 - \frac{e^2 \mu^2}{c^2}$$

Следовательно, вычитаемое под корнем в (45) равно b^2 . Интегрируя, найдем

$$r^2 = v^2 (t - t_0)^2 + b^2 \quad (46)$$

В момент $t = t_0$ электрон приближается ближе всего к полюсу. Он подходит к нему на расстоянии b , в котором он прошел бы, если бы с самого начала на него не действовали никакие силы. Так как любой момент может быть принят за начальный, то следовательно, касательная траектории длительно касается сферы радиуса b описанной около начала координат. Согласно (46) электрон сначала приближается к полюсу, затем, начиная с $t = t_0$, удаляется и уходит в бесконечность. При $t = t_0$ траектория касается сферы. Из (46) видно, что r возрастает после касания по тому же закону, как если бы с этого момента электрон двигался по инерции. Мы знаем уже, что электрон при этом описывает спираль, вьющуюся по поверхности конуса. Найдем уравнение этой спирали в сферических координатах. Для этого исключим dt из (43) и (45).

Так как

$$\frac{mvb}{c} = \sin \vartheta,$$

получим дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{b}{r} \right) = \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}.$$

Интегрируя его и прибавляя уравнение конуса, найдем для траектории следующие два простых уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{r} &= \cos [(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta], \\ \operatorname{tg} \vartheta &= -\frac{mbvc}{e\mu} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Кроме того, еще должны быть указаны косинусы углов, составляемых осью конуса с осями координат. Положим, что последние выбраны так, что в начальный момент электрон находится на положительной оси z -ов, а начальная скорость его лежит в плоскости yz -ов. Постоянную b будем считать положительной, если начало координат остается влево от направления начальной скорости. Тогда искомые косинусы выразятся так

$$\alpha_0 = \sin \vartheta,$$

$$\beta_0 = 0,$$

$$\gamma_0 = \cos \vartheta$$

На чертеже (рис. 6) изображен тот случай движения, когда μ и b положительны, а e отрицательно. Если смотреть в направлении магнитных силовых линий, то вращение электрона происходит по часовой стрелке.

9. Электрический и магнитный заряды в одной точке. Предположим теперь, что на электрон действует одновременно и электрический заряд e' и магнитный заряд μ , сосредоточенные в начале координат. Уравнения движения имеют тогда вид

$$m\ddot{x} = \frac{ee'x}{r^3} + \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{y}z - \dot{z}y}{r^3} \right),$$

$$m\ddot{y} = \frac{ee'y}{r^3} + \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{z}x - \dot{x}z}{r^3} \right),$$

$$m\ddot{z} = \frac{ee'z}{r^3} + \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{r^3} \right).$$

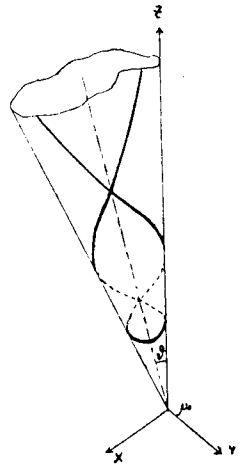


Рис. 6.

Поступая с этими уравнениями так же, как и в предыдущем параграфе, мы убеждаемся, что и здесь имеют место интегралы (38). Электрон опять движется по поверхности конуса, уравнение которого — (40). Тогда как эти интегралы не зависят от электрического заряда e' , интеграл энергии, наоборот, не зависит от магнитного заряда μ и имеет значение

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{ee'}{r} = \epsilon$$

Вводя опять систему сферических координат, ось которых совпадает с осью конуса, напишем этот интеграл в виде

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{ee'}{r} = \epsilon$$

и принимая во внимание, что опять, как и в предыдущем параграфе, имеет место

$$mr^2\dot{\varphi} = C, \quad (48)$$

исключим dt из этих обоих уравнений. Результат будет

$$\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} + \frac{2mee'}{C^2 r} = \frac{2\epsilon m}{C^2} \quad (49)$$

Если введем аналогично (28) обозначения

$$p = -\frac{C^2 \sin^2 \vartheta}{mee'},$$

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon C^2 \sin^2 \vartheta}{me^2 e'^2}}, \quad (50)$$

то уравнение (49) приведет к виду

$$\sin \vartheta d\vartheta = \frac{d\left(\frac{\sin \vartheta}{r} - \frac{1}{p}\right)}{+ \sqrt{\frac{r^2}{p^2} - \left(\frac{\sin \vartheta}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}}$$

Интегрируя это уравнение, найдем уравнения траектории:

$$\left. \begin{aligned} p \frac{\sin \vartheta}{r} &= 1 + \eta \cos [\sin \vartheta (\varphi - \varphi_0)] \\ \cos \vartheta &= -\frac{e\mu}{cC} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Или, вводя опять как и в предыдущем параграфе, начальную скорость и длину перпендикуляра из начала координат на направление ее, можем второе из этих уравнений заменить через

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{mb_0 v_0 c}{e\mu} \quad (52)$$

Здесь, однако, во время движения v и b не постоянны, а постоянно, как показывает последнее равенство, их произведение. Как видно из (50), η , величина, аналогичная эксцентриситету, меньше единицы при $\epsilon < 0$, равна ей при $\epsilon = 0$ и больше единицы при $\epsilon > 0$. Уравнение (51) показывает, что в первом случае изменение r происходит в конечных пределах между значениями

$$\frac{p \sin \vartheta}{1 \pm \eta} \quad (53)$$

Во втором и третьем случаях r достигает минимального значения

$$\frac{p \sin \vartheta}{1 + \eta},$$

а затем траектория уходит в бесконечность. При этом как и

в отсутствие электрического заряда, e' , она вьется по конусу, причем секториальная скорость (48) постоянна. При $\epsilon < 0$ траектория по очереди касается сфер радиусов (53). Из первого уравнения (51), видно, что траектория представляет замкнутую кривую, то есть движение периодически, когда $\sin \vartheta$ выражается рациональной дробью. Действительно, из этого уравнения видно, что r есть периодическая функция от φ с периодом $\frac{2\pi}{\sin \vartheta}$. Азимут же периодичен с периодом 2π . Если существуют такие два целых положительных числа k и l , что

$$2\pi k = \frac{2\pi l}{\sin \vartheta},$$

то после k оборотов около конуса электрон возвратится в первоначальное положение. При этом значит,

$$\sin \vartheta = \frac{l}{k} \quad (54)$$

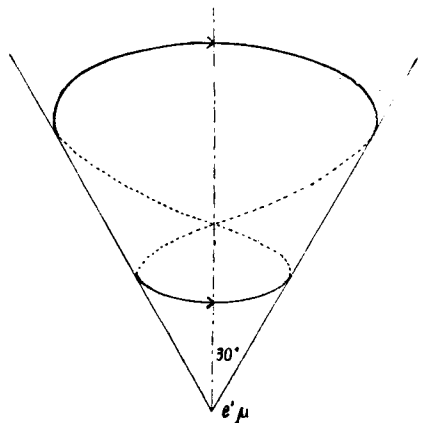


Рис. 7.

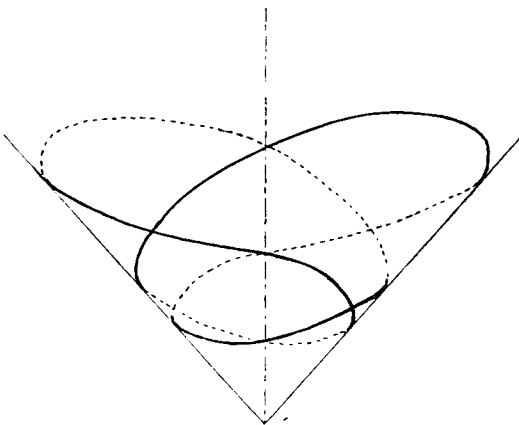


Рис. 8.

Действительно, из этого уравнения видно, что r есть периодическая функция от φ с периодом $\frac{2\pi}{\sin \vartheta}$. Азимут же периодичен с периодом 2π . Если существуют такие два целых положительных числа k и l , что

— рациональная дробь. Форма траектории для случаев $\sin \vartheta = \frac{1}{2}$ и $\sin \vartheta = \frac{2}{3}$ изображена на рисунках 7 и 8. Отсюда уже видно, что замкнутые траектории могут быть очень сложными. Какому условию должна удовлетворять начальная скорость электрона, чтобы движение происходило периодически, следует из (52). Именно, должно быть

$$v_0 b_0 = \frac{e\mu}{mc} \sqrt{\frac{l}{k^2 - l^2}},$$

где k и l два целых числа. Так как произведение vb постоянно во время движения, то значки $_0$ в формуле можно и опустить.

В случае $\mu = 0$ мы возвращаемся к разобранным в § 6 движению по коническим сечениям, в случае $e' = 0$ — к движению по спирали (47).

Действительно, в первом случае по (52) имеем

$$\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

поверхность конуса вырождается в плоскость. $\sin \vartheta$ делается равным единице и уравнения (51) превращаются в уравнения конического сечения.

Если, наоборот $e' = 0$, то по (50) p и η становятся бесконечно велики. Но отношение

$$\frac{p \sin \vartheta}{\eta},$$

как нетрудно убедиться, стремится к пределу b , которое при $e' = 0$ постоянно. Поэтому делением первого из уравнений (51), на η возвратимся к уравнению спирали (47).

Мы подробно остановимся на случае $\epsilon < 0$, когда под действием магнитного поля эллиптическая орбита свертывается в спираль вьющуюся по конусу в промежутке между сферами радиусов (51). Если наоборот $\epsilon \geq 0$, то, как следует из (51), периодические движения невозможны потому, что электрон уходит в бесконечность.

ГЛАВА II.

Метод уравнения Гамильтона—Якоби

10. Приведение уравнений к каноническому виду. Прежде чем приступить к разбору движений электронов в более сложных полях, изложим вкратце метод решения динамических задач, которым в дальнейшем нам придется по-