

Процессы в полупроводниковом диоде при гармоническом воздействии

Д.В. Лосев, Д.С. Бардашов, А.Г. Быков

Известно, что в начальный период времени после включения любого устройства, оно ведет себя зачастую непредсказуемым образом (перегорают лампочки, телевизор демонстрирует шумы и т.д.). В это время выходной сигнал определяется совместным влиянием внешнего воздействия и процессов, определяемых видом устройства. Переходные процессы обычно заканчиваются быстро, и часто их можно не учитывать. Но когда воздействие представляет собой быстроизменяющийся процесс, игнорировать влияние переходных процессов нельзя. В частности, переходные процессы являются основным фактором, ограничивающим быстродействие вычислительных устройств.

Математическое описание переходных процессов состоит в решении дифференциальных уравнений классическим или операционным методом. Это сложная проблема, которая допускает решение только для простейших электрических цепей, в основном линейных. В случаях же цепей, содержащих большое количество элементов (особенно нелинейных), точный расчет становится невозможным, и поведение системы определяется лишь опытным путем.

Существующая теория взаимодействия полупроводникового р-п перехода с электромагнитным полем разработана, в основном, для случая приложенного постоянного напряжения после того, как переходные процессы завершились. В случае же быстро изменяющегося сигнала, когда влияние переходных процессов является определяющим, теория развита существенно слабее и ограничивается случаями гармонического сигнала в приближении его малой амплитуды и бесконечной длительности [1] и исследованием процессов включения/выключения или переключения диода при изменении полярности напряжения на противоположную [3]. Рассмотрим эти случаи.

Решение дифференциального уравнения

Для исследования процессов в диоде необходимо решать уравнение непрерывности в диффузионном приближении [1]

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} - \frac{\Delta p}{\tau_p}. \quad (1)$$

Здесь рассматривается случай несимметричного р-п перехода, когда равновесная концентрация дырок в р-области значительно превышает концентрацию электронов в п-области. Для многих диодов это приближение, позволяющее ограничиться исследованием только дырочного тока в п-области (базе), хорошо выполняется [2]. Кроме того, р-п переход принимается плоским и с полуограниченной базой, поэтому можно ограничиться только зависимостью от одной координаты $x \in [0, \infty)$. Используются обозначения: $\Delta p(x, t)$ – избыточная концентрация дырок в базе, превышающая равновесную

концентрацию p_n за счет приложенного электрического поля, D_p – коэффициент диффузии дырок, τ_p – время жизни дырок, определяющее среднюю длительность рекомбинационных процессов в базе.

Граничные условия зададим следующими [1]:

на границе p-n перехода

$$\Delta p(0,t) = p_n \cdot \left[e^{\frac{qu(t)}{kT}} - 1 \right]$$

($u(t)$ – воздействующее на диод напряжение),

при неограниченном удалении от него

$$\Delta p(\infty,t) = 0.$$

Начальное условие

$$\Delta p(x,0) = 0.$$

Введем обозначения $\Delta p(x,t) = U$, $D_p = a$, $-1/\tau_p = b$, после чего уравнение (1)

примет вид

$$U_t = aU_{xx} + bU, \quad (2)$$

где $U_t \equiv \frac{\partial U}{\partial t}$ – первая производная по времени, $U_{xx} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ – вторая производная

по координате.

Решать данное уравнение будем методом интегральных преобразований. Поскольку граничное условие задано на саму искомую функцию (условие Дирихле), применим \sin -преобразование Фурье, которое имеет вид [4]:

$$F(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx \quad (\text{прямое преобразование}),$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\alpha) \sin \alpha x d\alpha \quad (\text{обратное преобразование}). \quad (3)$$

Для этого умножим обе части уравнения (2) на величину $2 \sin \alpha x$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до ∞ :

$$2 \int_0^{\infty} U_t \sin \alpha x dx = 2a \int_0^{\infty} U_{xx} \sin \alpha x dx + 2b \int_0^{\infty} U \sin \alpha x dx.$$

Для перехода к изображению $\bar{U}(\alpha,t) = 2 \int_0^{\infty} U \sin \alpha x dx$ поменяем в левой части

уравнения порядок вычисления производной по t и интеграла по x

$$2 \int_0^{\infty} U_t \sin \alpha x dx = \bar{U}_t(\alpha,t),$$

а интеграл $2a \int_0^{\infty} U_{xx} \sin(\alpha x) dx$ вычислим по частям, применяя граничные условия,

$$\begin{aligned}
 2a \int_0^{\infty} U_{xx} \sin \alpha x dx &= \left. \begin{array}{l} u = \sin \alpha x \\ du = \alpha \cos \alpha x dx \\ dv = U_{xx} dx \\ v = U_x \end{array} \right| = 2a \left(U_x \sin \alpha x \Big|_0^{\infty} - \alpha \int_0^{\infty} U_x \cos \alpha x dx \right) = \\
 &= \left. \begin{array}{l} u = \cos \alpha x \\ du = -\alpha \sin \alpha x dx \\ dv = U_x dx \\ v = U \end{array} \right| = -2a\alpha \left(U \cos \alpha x \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} U \sin \alpha x dx \right) = \\
 &= -2a\alpha \left(-U(0,t) + \alpha \int_0^{\infty} U \sin \alpha x dx \right) = 2a\alpha U(0,t) - a\alpha^2 \bar{U}(\alpha, t).
 \end{aligned}$$

В результате уравнение для изображения примет вид

$$\bar{U}_t(\alpha, t) + a\alpha^2 \bar{U}(\alpha, t) - b\bar{U}(\alpha, t) = 2a\alpha U(0, t).$$

Для решения этого уравнения применим преобразование Лапласа по временной переменной [4]

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (\text{прямое преобразование Лапласа}), \quad (4)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds \quad (\text{обратное преобразование Лапласа}). \quad (5)$$

Используя свойство преобразования производной функции-оригинала

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} \Leftrightarrow sF(s) - f(0),$$

приходим к алгебраическому уравнению для трансформанты, полученной путем применения прямых интегральных преобразований Фурье и Лапласа $\bar{\bar{U}}(\alpha, s)$,

$$s\bar{\bar{U}}(\alpha, s) + (a\alpha^2 - b)\bar{\bar{U}}(\alpha, s) = 2a\alpha \bar{U}(0, s),$$

откуда

$$\bar{\bar{U}}(\alpha, s) = \frac{2a\alpha \cdot \bar{U}(0, s)}{s + a\alpha^2 - b}.$$

Вычислим обратное преобразование Лапласа, применяя теорему о свертке [4],

$$\bar{U}(\alpha, t) = 2a\alpha \int_0^t U(0, \tau) e^{(b-a\alpha^2)(t-\tau)} d\tau.$$

Вычислим обратное sin-преобразование Фурье по формуле (3)

$$U(x, t) = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha \sin \alpha x d\alpha \int_0^t U(0, \tau) e^{(b-a\alpha^2)(t-\tau)} d\tau.$$

Меняем порядок интегрирования

$$U(x, t) = \frac{2a}{\pi} \int_0^t U(0, \tau) e^{b(t-\tau)} d\tau \int_0^{\infty} \alpha e^{-a\alpha^2(t-\tau)} \sin \alpha x d\alpha.$$

С помощью соотношения

$$\alpha \sin \alpha x = -\frac{d}{dx} \cos \alpha x$$

внутренний интеграл сводится к вычислению интеграла Пуассона [5]

$$\int_0^{\infty} e^{-a\alpha^2(t-\tau)} \cos \alpha x d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}}.$$

Таким образом, решение уравнения (2) имеет вид

$$U(x, t) = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^t \frac{e^{b(t-\tau)}}{\sqrt{(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}} U(0, \tau) d\tau,$$

а после возвращения к исходным величинам получаем решение уравнения (1)

$$\Delta p(x, t) = \int_0^t \frac{x e^{\frac{t-\tau}{\tau_p}}}{2\sqrt{\pi D_p} (t-\tau)^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4D_p(t-\tau)}} p_n \left[e^{\frac{qu(\tau)}{kT}} - 1 \right] d\tau.$$

В диффузионном приближении плотность тока через p-n переход определяется его диффузионной составляющей [1]

$$j_p = -qD_p \left. \frac{\partial \Delta p}{\partial x} \right|_{x=0},$$

т.е.

$$j_p = -\frac{q\sqrt{D_p} p_n}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-(t-\tau)/\tau_p}}{(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{\frac{qu(\tau)}{kT}} - 1 \right] d\tau. \quad (6)$$

Случаи кусочно-постоянного воздействующего сигнала и особенности их численной реализации

Рассмотрим сначала зависимость плотности тока от времени в простейшем случае приложения к р-п переходу постоянного напряжения $u(t) = u_0$. Непосредственное вычисление интеграла (6) с помощью замены $y = (t - \tau)/\tau_p$,

$$j_p = -\frac{q\sqrt{D_p} p_n}{2\sqrt{\pi\tau_p}} \left[e^{\frac{qu_0}{kT}} - 1 \right] \cdot \int_0^{t/\tau_p} \frac{e^{-y}}{y^{3/2}} dy$$

и соотношения [5]

$$\int \frac{e^{-y}}{y^{3/2}} dy = -\frac{2}{\sqrt{y}} e^{-y} - 2\sqrt{\pi} \operatorname{erf} \sqrt{y},$$

где $\operatorname{erf}(z)$ – интеграл вероятности, приводит к особенности при $y = 0$. Для ее устранения представим интеграл в виде разности интегралов по промежуткам $[0, \infty]$ и $[t/\tau_p, \infty]$ и учтем, что первый из интегралов сводится к гамма-функции $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$, а второй интеграл особенности уже не содержит:

$$j_p = \frac{q\sqrt{D_p} p_n}{\sqrt{\tau_p}} \left[e^{\frac{qu_0}{kT}} - 1 \right] g(t/\tau_p), \quad g(z) = \frac{e^{-z}}{\sqrt{\pi z}} + \operatorname{erf} \sqrt{z}. \quad (7)$$

Поскольку первое слагаемое быстро убывает, а $\operatorname{erf}(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 1$, то после окончания переходного процесса имеем хорошо известную статическую вольтамперную характеристику полупроводникового диода. Однако численная процедура за счет указанной особенности приводит к систематической погрешности результата (рис. 1). На этом графике изображена временная зависимость нормированной плотности тока $g(t/\tau_p)$, где принято значение $\tau_p = 1$ мкс., что соответствует времени жизни дырок в германии. Сплошной линией показан аналитический расчет, штриховой – численный расчет в системе Mathcad по формуле (6) при добавлении в знаменатель малой поправки порядка 10^{-11} с., горизонтальная линия показывает предельное значение. Таким образом, даже в самом простом случае лишь аналитическое вычисление интеграла (6) дает правильное понимание процессов в полупроводниковом р-п переходе.

Следующей по сложности является задача переключения диода. Пусть

$$u(0, t) = \begin{cases} u_1, & t \leq t_0, \\ u_2, & t > t_0. \end{cases}$$

Тогда описанная выше процедура приводит к формуле

$$j_p = \frac{q\sqrt{D_p} p_n}{\sqrt{\tau_p}} \left\{ \left[e^{\frac{qu_1}{kT}} - 1 \right] g\left(\frac{t}{\tau_p}\right) + \left[e^{\frac{qu_2}{kT}} - e^{\frac{qu_1}{kT}} \right] g\left(\frac{t-t_0}{\tau_p}\right) \chi(t-t_0) \right\},$$

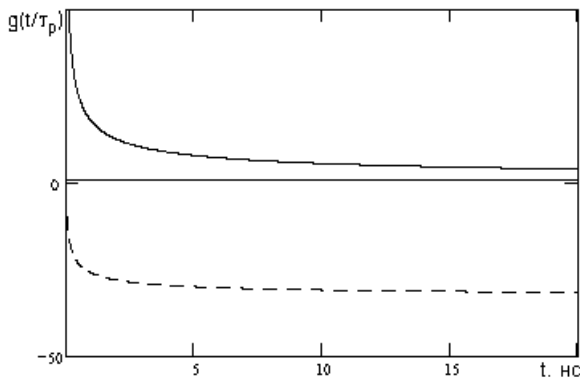


Рис. 1. Зависимость плотности тока при приложении постоянного напряжения.

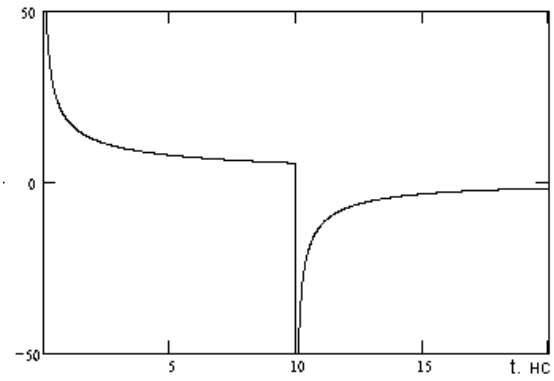


Рис. 2. Зависимость плотности тока при переключении напряжения из положительного в нулевое.

где $\chi(z)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Для примера на рис. 2 изображен график переходного процесса при переключении диода из прямого $u_1 = 1$ В в нейтральное состояние $u_2 = 0$ при той же нормировке, что и рис. 1.

Случай гармонического воздействующего сигнала

Исследуем теперь зависимость плотности тока от времени при воздействии на p-n переход гармонического сигнала

$$u(t) = u_m \sin \omega t, \quad (8)$$

с параметрами $u_m = 10kT/q = 0.25$ В, $\omega = 50$ ГГц, так что период колебаний много меньше постоянной релаксации среды, роль которой играет время жизни дырок $\tau_p \sim 1$ мкс. (типичная величина для германиевых структур, в случае кремния $\tau_p \sim 0.1$ мкс.). И для этого случая непосредственное вычисление интеграла (6) численными методами приводит к неверному результату. Это связано со сложной структурой подынтегральной функции – быстрые осцилляции в показателе экспоненты соседствуют с особенностью в знаменателе на верхнем пределе, наличие больших (u_m, ω) и малых (t, τ_p) параметров не позволяет воспользоваться простыми асимптотическими приближениями. Непосредственное аналитическое вычисление интеграла наталкивается на отсутствие известных интегралов, хотя бы как-то соответствующих (6). Поэтому используем метод вычисления, основанный на применении интегрального преобразования Лапласа (4)-(5) к интегралу (6), рассматриваемому как свертка оригиналов.

Применение прямого преобразования Лапласа (4) к

$$V(t) = -\frac{2\sqrt{\pi}j_p}{q\sqrt{D_p p_n}} = \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-(t-\tau)/\tau_p} \left[e^{A \sin \omega \tau} - 1 \right] d\tau, \quad A = \frac{qu_m}{kT}. \quad (9)$$

дает

$$\bar{V}(s) = \bar{F}_1(s) \bar{F}_2(s),$$

где [5]

$$\bar{F}_1(s) = \int_0^\infty \frac{1}{\tau^{3/2}} e^{-\tau/\tau_p} e^{-s\tau} d\tau = -2\sqrt{\pi} \left(s + 1/\tau_p \right),$$

$$\bar{F}_2(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} \left[e^{A \sin \omega \tau} - 1 \right] d\tau = \frac{2}{\omega^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{s}{(s/\omega)^2 + k^2} J_k \left(\frac{kA\omega}{s} \right),$$

где $J_k(x)$ – функции Бесселя порядка k [6]. Обратное преобразование (5) приводит к значению

$$V(t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi i \omega^2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \sqrt{s+1/\tau_p} \sum_{k=1}^\infty \frac{s}{(s/\omega)^2 + k^2} J_k \left(\frac{kA\omega}{s} \right) ds. \quad (10)$$

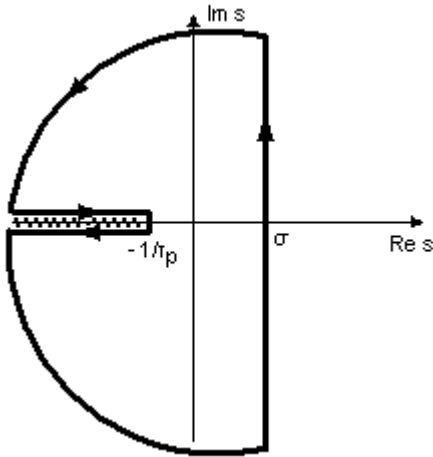


Рис. 3. Контур для вычисления интеграла (10).

Вычисление этого интеграла производится с помощью теории вычетов [7]. Замкнем контур так, как показано на рис. 3, и учтем, что интеграл по дуге бесконечно большого радиуса вследствие леммы Жордана равен нулю [7], а интегралы вдоль верхнего и нижнего берегов разреза, соединяющего точки ветвления $s = -1/\tau_p$ и $s = \infty$ многозначной функции $\sqrt{s+1/\tau_p}$, проходятся в противоположных

направлениях, и значения квадратного корня отличаются знаком. Тогда, согласно теореме о вычетах, $V(t)$ равен сумме вычетов в полюсах первого порядка $s = \pm ik\omega$

$$2\pi i \operatorname{Res}_{s=\pm ik\omega} e^{st} \bar{F}_1(s) \bar{F}_2(s) = -2\sqrt{\pi} \sum_{k=1}^\infty (\mp i)^k I_k(A) e^{\pm ik\omega t} \sqrt{\pm ik\omega + 1/\tau_p}, \quad (11)$$

в существенно особой точке $s = 0$ и удвоенного интеграла вдоль верхнего берега разреза, на котором принято арифметическое значение корня,

$$\frac{4}{\sqrt{\pi i \omega^2}} \int_{-\infty}^{-1/\tau_p} e^{st} \sqrt{s+1/\tau_p} \sum_{k=1}^\infty \frac{s}{(s/\omega)^2 + k^2} J_k \left(\frac{kA\omega}{s} \right) ds.$$

Последний интеграл с помощью замены $y = -\frac{s+1/\tau_p}{\omega}$ приводится к удобной для численного интегрирования форме

$$-\frac{4e^{-t/\tau_p} \sqrt{\omega}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [y + 1/(\omega \tau_p)]}{[y + 1/(\omega \tau_p)]^2 + k^2} J_k \left(\frac{kA\omega}{y + 1/(\omega \tau_p)} \right) dy.$$

Подчеркнем, что в отличие от интеграла (6) данный интеграл не содержит особенности на промежутке интегрирования и, благодаря быстро убывающей экспоненциальной функции, допускает быстрое и устойчивое к погрешностям численное интегрирование.

Для вычисления вычета в существенно особой точке необходимо разложить подынтегральную функцию (10) в ряд Тейлора и выделить коэффициенты при степени s^{-1} . Не будем останавливаться на выполнении этой трудоемкой процедуры (см. полный вывод приближенного выражения в [8]), поскольку при выполнении условия $\omega \tau_p \gg 1$ преимущественный вклад в $V(t)$ дает сумма вычетов (11). Таким образом, мы, получили

$$V(t) \approx -4\sqrt{\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-i)^k I_k(A) e^{ik\omega t} \sqrt{ik\omega + 1/\tau_p} \right], \quad (12)$$

где $I_k(A)$ – модифицированная функция Бесселя [6].

Пренебрегая малым слагаемым $1/\tau_p$ в выражении (12) и учитывая, что

$$\sqrt{ik\omega} = \sqrt{k\omega/2}(1+i), \quad (-i)^k e^{ik\omega t} = \cos k[\omega t - \pi/2] + i \sin k[\omega t - \pi/2],$$

его можно представить как

$$V(t) \approx -4\sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} I_k(A) \sqrt{k\omega/2} (\cos k[\omega t - \pi/2] - \sin k[\omega t - \pi/2]),$$

а плотность тока (6), протекающего через диод –

$$j_p \approx 2q\sqrt{D_p} p_n \sqrt{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} I_k(A) \sqrt{k} \cos(k[\omega t - \pi/2] + \pi/4). \quad (13)$$

Численное моделирование и анализ результатов

На рис. 4 представлена рассчитанная с помощью пакета Mathcad зависимость для сигнала (8). При этом использованы значения $D_p = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$, $p_n = 2 \cdot 10^8 \text{ м}^{-3}$. Также для сравнения штриховой линией указана статическая характеристика диода (7), в которой постоянное напряжение заменено на сигнал (8). Для удобства восприятия она умножена на масштабный множитель $\sqrt{\omega \tau_p}/4$. Для получения значения тока его плотность, изображенную на рис 4, необходимо умножить на площадь $p-n$ перехода – величину порядка 10^{-7} м^2 [2].

Отметим прежде всего существенную роль переходных процессов при быстром переключении диода, за счет чего зависимость приобретает сложный функциональный вид. При изменении полярности приложенного сигнала с положительной на отрицательную в начале имеет место резкий отрицательный

выброс тока, который затем стремится к значению тока насыщения. Этот же эффект наблюдался на рис. 2. Этот эффект давно известен, и ему дается следующее объяснение [3]: при быстром переключении дырки не успевают рекомбинировать, и поэтому обратный ток, который обычно мал за счет незначительного количества неосновных для n -области носителей заряда, в этом случае имеет существенную величину. Постепенно избыток дырок в n -области уменьшается за счет рекомбинации и вытекания в p -область, и обратный ток приходит к своему статическому, малому значению. Поскольку в момент прохождения импульса $p-n$ переход пропускает ток в обе стороны практически одинаково и фактически не обладает выпрямляющими свойствами, то площади под кривыми в верхней и нижней полуплоскостях приблизительно равны.

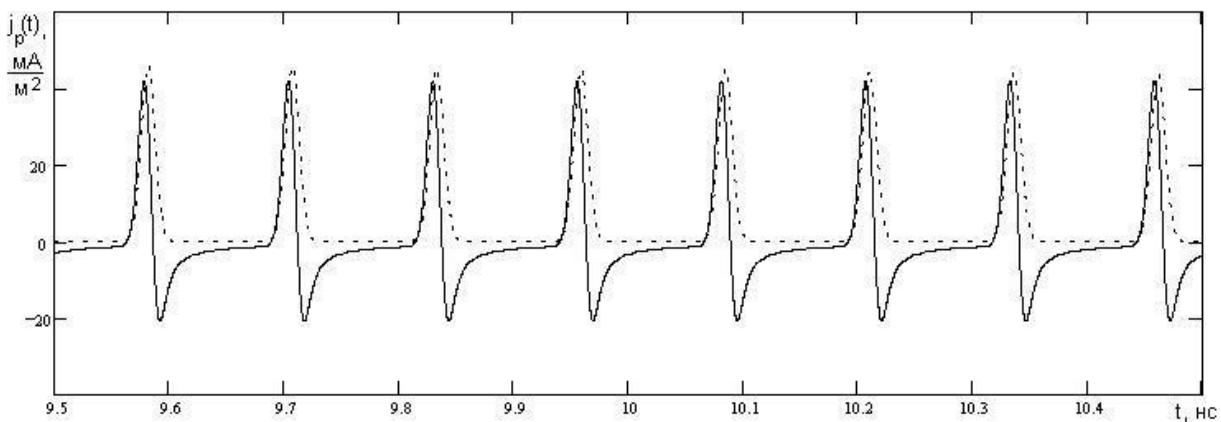


Рис. 4.

Также интерес вызывает существенное увеличение значения тока по сравнению с низкочастотным сигналом (на величину порядка $\sqrt{\omega \tau_p}$, в данном случае около 200 раз). Здесь имеет место похожая трактовка [3]: за счет наличия большого количества носителей заряда, не успевающих рекомбинировать, повышается удельная проводимость полупроводника $\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p)$, (μ_n, μ_p – подвижности электронов и дырок), и, согласно закону Ома, плотность тока.

В заключение сравним представленное решение с классическим решением, изложенным, например, в [1]. Оно получено методом комплексных амплитуд в предположении малости амплитуды воздействующего сигнала, в результате чего можно ограничиться линейными членами ряда Тейлора для экспоненты

$$e^{\frac{qu_m \sin \omega t}{kT}} \approx 1 + \frac{qu_m \sin \omega t}{kT}.$$

Приведем результат для сигнала (8):

$$j_p \approx \frac{q\mu_p p_n u_m}{\sqrt{2D_p \tau_p}} \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\omega \tau_p)^2}} \sin \omega t + \frac{\omega \tau_p}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\omega \tau_p)^2}}} \cos \omega t \right]. \quad (14)$$

При условии $\omega\tau_p \gg 1$ получаем

$$j_p \approx \frac{q\mu_p P_n u_m}{\sqrt{D_p}} \sqrt{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right),$$

что совпадает с решением (13) при достаточно малых $A = \frac{qu_m}{kT}$, для которых можно считать $I_k(A) \approx (A/2)^k / k!$. При этом учтено соотношение Эйнштейна $D_p = kT\mu_p/q$. Таким образом, классическое решение (14) справедливо только при очень малых величинах входного сигнала $u_m \ll 0.026 \text{ В}$ (при этом $A \ll 1$). При более высоких уровнях сигнала проявляются гармоники на кратных частотах, благодаря чему зависимость обостряется и теряет гармоническую форму.

Результат расчета приведен на рис. 5, где зависимость (13) показана сплошной, а зависимость (14), умноженная на множитель $\sqrt{\omega\tau_p}/4$, – штриховой линией.

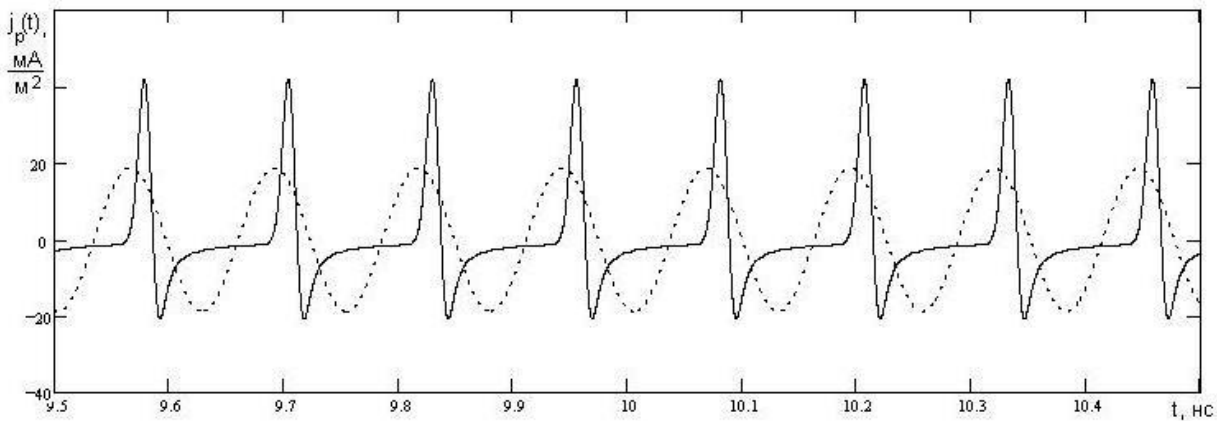


Рис. 5.

Таким образом, применение методов теории функции комплексной переменной позволяет точнее описывать характеристики полупроводниковых приборов при различных видах воздействующего сигнала [9]. К сожалению, эти методы еще не в полной мере используются в современной науке.

Список литературы

1. Гаман В.И. Физика полупроводниковых приборов: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2000. – 426 с.
2. Малянов С.В., Калыгина В.М. Сборник задач по физике биполярных полупроводниковых приборов: Учебное пособие. – Томск: НТЛ, 2008. – 112с.
3. Носов Ю.Р. Полупроводниковые импульсные диоды. – М.: Сов. радио, 1965.–224 с.
4. Бобровников М.С., Пономарев Г.А., Старовойтова Р.П. Интегральные преобразования в задачах дифракции и распространения радиоволн. – Томск: Изд-во ТГУ, 1986. – 138 с.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-лит., 1981. – 800 с.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит. 1973. – 749 с.
8. Лосев Д.В., Бардашов Д.С., Быков А.Г. Процессы в полупроводниковом диоде при гармоническом воздействии // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал), 2016, № 5, <http://jre.cplire.ru/jre/may16/8/text.html>
9. Быков А.Г., Лосев Д.В., Бардашов Д.С. Нелинейные свойства полупроводникового диода в импульсном режиме // Сборник статей IV Всероссийской научно-технической конференции «Электроника и микроэлектроника СВЧ». СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015, Т. 2. – С.16-20. http://www.mwelectronics.ru/2015/Papers/P01_03_BykovAG_Nelineinye_svoistva.pdf