Министерство образования и науки Российской Федерации
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой радиофизики,
профессор
___________ В.П. Якубов
"___"____________ 2004 г.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания

Томск 2004

Указания РАССМОТРЕНЫ И УТВЕРЖДЕНЫ методической комиссией радиофизического факультета

Протокол № ___ от "__" ___________ 2004 г.

Председатель методической комиссии радиофизического факультета,

доцент Г.М. Дейкова

В методических указаниях содержатся краткие сведения о постановке, вопросах существования и единственности, а также методах решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Приведены наиболее важные свойства собственных значений и собственных функций. Решение неоднородной краевой задачи основано на функции Грина; рассмотрены способы ее построения.

Изложенный материал предназначен для облегчения усвоения студентами соответствующих разделов в курсах "Дифференциальные и интегральные уравнения" и "Методы математической физики".

Составители: доцент В.П. Беличенко,

доцент Д.В. Лосев

Для дифференциальных уравнений второго порядка наиболее сушественные и интересные для практического применения результаты получены при изучении двух ключевых задач. Первая из них, называемая задачей Коши, моделирует физические процессы, изменяющиеся во времени, и по этой причине для нее характерно задание начальных условий – значений исследуемой величины и скорости ее изменения в некоторый момент времени. К другой разновидности – краевой задаче – приходят, как правило, при анализе пространственной структуры сред и взаимодействующих с ними физических полей. В этом случае обычно имеется информация о состоянии процесса на границе изучаемой области – так называемые граничные условия.

В данных методических указаниях изложены основные результаты для однородной и неоднородной краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

1. Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка, определенного на отрезке $[a,b]$, в граничных точках которого $x=a$ и $x=b$ искомая функция, ее первая производная или их линейная комбинация имеют заданные значения.

Определяющее значение для таких задач имеет понятие оператора Штурма-Лиувилля. Определим этот оператор. Исходим из общего вида линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_2(x)y(x)=0\,,\ \ x\in[a,b]$$

Умножим обе части уравнения на функцию

$$p(x)=\exp\left(\int_a^x p_1(s)ds\right).$$

Тогда уравнение примет вид

$$p(x)y''(x)+p(x)p_1(x)y'(x)+p(x)p_2(x)y(x)=0$$

или, с учетом соотношения $p_1(x)=\frac{dp(x)}{dx}$, может быть представлено как

$$L[y(x)]=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right]-q(x)y(x)=0\,,$$

где $q(x)=-p(x)p_2(x)$.

Дифференциальный оператор $L=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]-q(x)$ называется оператором Штурма-Лиувилля. Потребуем выполнения следующих условий: функции $p(x)$, $p'(x)$ и $q(x)$ – непрерывны на отрезке $[a,b]$, причем $p(x)>0$, $q(x)\geq 0$. Задачей Штурма-Лиувилля называется задача вида

$$L[y(x)]+\lambda r(x)y(x)=0\,,\ \ x\in[a,b], \tag{1}$$

$$y(a)=0\,,\ \ y(b)=0\,, \tag{2}$$

где функция $r(x)$ носит название весовой функции и принимает на отрезке $[a,b]$ положительные значения, λ – некоторый числовой параметр.

Очевидно, задача Штурма-Лиувилля всегда имеет решение $y(x)=0$ (так называемое тривиальное решение). Нетривиальные решения задачи существуют не при любых значениях параметра λ. Поэтому решение задачи Штурма-Лиувилля сводится к двум этапам:

1. Найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2). Такие значения называются собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля, а вся их совокупность — спектром этой задачи. Условия наложенные на функции $p(x)$, $p'(x)$ и $q(x)$ гарантируют, что спектр будет дискретным.
2. Найти нетривиальные решения уравнения (1), соответствующие собственным значениям и удовлетворяющие граничным условиям (2). Эти решения называются собственными функциями. Каждая из них определена с точностью до произвольной постоянной. При исследовании колебательных процессов собственные функции часто называют собственными колебаниями или модами физической системы.

П р и м е р 1 . Определим собственные значения и собственные функции следующей задачи Штурма-Лиувилля

$$y''(x)+\lambda y(x)=0\,,\ x\in[0,b]\,,$$
$$y(0)=0\,,\ y(b)=0\,.$$

Здесь $p(x)=1$, $q(x)=0$, $r(x)=1$, т.е. эти функции удовлетворяют требуемым условиям. Общее решение данного уравнения $y(x)=C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Выясним, при каких значениях λ сформулированная задача имеет нетривиальные решения.

Пусть $\lambda<0$. Тогда из граничных условий вытекает

$$C_1+C_2=0,\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}b}+C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}b}=0.$$

Отсюда $C_2=-C_1$, $C_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}b}-e^{-\sqrt{-\lambda}b}\right)=0$. Второй множитель ни при каком значении $\lambda<0$ не обращается в нуль. Поэтому $C_1=0$, и нетривиальных решений в этом случае не существует.

Если $\lambda=0$, то общее решение получающегося уравнения $y''(x)=0$ записывается в виде $y(x)=C_1 x+C_2$. Используя граничные условия, видим, что $C_1=C_2=0$, т.е. и в данном случае имеем тривиальное решение.

Рассмотрим, наконец, случай $\lambda>0$. Здесь корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми, и общее решение представляется в виде $y(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$. Из первого граничного условия $y(0)=0$ получаем, что $C_2=0$. Второе условие $y(b)=0$ требует выполнения равенства $C_1\sin\sqrt{\lambda}b=0$. При $C_1=0$ вновь получим тривиальное решение. Следовательно, искомые собственные значения находятся из уравнения $\sin\sqrt{\lambda}b=0$, откуда $\lambda_k=(k\pi/b)^2$. Здесь k принимает любые значения из множества натуральных чисел. Отрицательные значения k не порождают новых собственных значений λ_k, а случай $k=0$ приводит к тривиальному решению. Собственные функции, отвечающие найденным собственным значениям, имеют вид $y_k(x) = C_k \sin\frac{k\pi}{b}x$, где C_k – некоторые произвольные постоянные.

З а м е ч а н и я .

1. Граничные условия (2) являются простейшими однородными условиями. Вместо них могут быть заданы однородные условия более общего вида

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0,$$
$$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0.$$

2. Если заданы неоднородные граничные условия вида

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = \gamma_1,$$
$$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2,$$

то такая задача может быть сведена к задаче с однородными условиями путем замены $y(x) = Y(x) + z(x)$. Функцию $Y(x)$ подбирают так, чтобы она удовлетворяла заданным неоднородным условиям. Тогда функция $z(x)$ будет удовлетворять однородным условиям, но дифференциальное уравнение для нее станет уже неоднородным.

П р и м е р 2 . Пусть в неоднородных граничных условиях коэффициенты $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, т.е. они имеют вид

$$y(a)=\gamma_1,\ y(b)=\gamma_2.$$

Положим, что

$$Y(x)=\gamma_1\frac{b-x}{b-a}+\gamma_2\frac{x-a}{b-a}.$$

Видно, что функция $Y(x)$ удовлетворяет требуемым неоднородным условиям. Уравнение $L[y(x)]+\lambda r(x)y(x)=0$ переходит в уравнение следующего вида для функции $z(x)$

$$L[z(x)]+\lambda r(x)z(x)=-L[Y(x)]-\lambda r(x)Y(x).$$

Дополнив это уравнение граничными условиями $z(a)=0$, $z(b)=0$, получим неоднородную краевую задачу.

2. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (1), (2).

1. *Множества собственных значений и собственных функций задачи счетные.*

Это означает, что каждое из множеств состоит из бесконечного числа элементов и эти элементы могут быть пронумерованы числами натурального ряда.

2. *Собственные значения задачи строго положительны.*

Действительно, собственная функция $y_k(x)$, отвечающая собственному значению λ_k, при подстановке в уравнение (1) обращает его в тождество. Умножим обе части этого тождества на $y_k(x)$ и проинтегрируем на отрезке $[a,b]$:

$$\int_a^b y_k(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_k(x)}{dx}\right]dx-\int_a^b q(x)y_k^2(x)dx+\lambda_k\int_a^b r(x)y_k^2(x)dx=0\,.$$

Возьмем первый интеграл по частям

$$\int_a^b y_k(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_k(x)}{dx}\right]dx=p(x)y_k(x)\frac{dy_k(x)}{dx}\bigg|_a^b-\int_a^b p(x)\left[\frac{dy_k(x)}{dx}\right]^2 dx.$$

В силу граничных условий внеинтегральный член равен нулю. Следовательно для λ_k имеет место соотношение

$$\lambda_k=\frac{\int_a^b p(x)\left[\frac{dy_k(x)}{dx}\right]^2 dx+\int_a^b q(x)y_k^2(x)dx}{\int_a^b r(x)y_k^2(x)dx}.$$

Поскольку функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ неотрицательны, то $\lambda_k>0$.

3. *Собственные функции задачи, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны с весом* $r(x)$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными с весом $r(x)$ на отрезке $[a,b]$, если имеет место соотношение

$$\int_a^b r(x)f(x)g(x)dx=0\,.$$

Пусть имеются собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$, отвечающие собственным значениям λ_n и λ_m. Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$L[y_n(x)]+\lambda_n r(x) y_n(x)=0,$$
$$L[y_m(x)]+\lambda_m r(x) y_m(x)=0.$$

Умножим первое из этих уравнений на $y_m(x)$, второе – на $y_n(x)$, из первого уравнения вычтем второе и результат проинтегрируем на отрезке $[a,b]$

$$\int_a^b \left\{ y_m \frac{d}{dx}\left[p\frac{dy_n}{dx}\right] - y_n \frac{d}{dx}\left[p\frac{dy_m}{dx}\right]\right\} dx = (\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b r(x) y_n y_m dx .$$

Выражение в фигурных скобках может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dx}\left[y_m p\frac{dy_n}{dx} - y_n p\frac{dy_m}{dx}\right],$$

что легко проверяется непосредственным дифференцированием. Вследствие этого

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) dx = \left[y_m p\frac{dy_n}{dx} - y_n p\frac{dy_m}{dx}\right]_a^b = 0,$$

так как функции $y_m(x)$ и $y_n(x)$ обращаются в нуль в граничных точках отрезка.

З а м е ч а н и е . Свойства 1 и 3 сохраняют силу и при более общих условиях

$$\alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=0,\ \alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=0.$$

4. Теорема Стеклова. *Произвольная функция, дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[a,b]$, *удовлетворяющая однородным граничным условиям задачи (1), (2), разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям* $y_n(x)$ *этой задачи*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \tag{3}$$

где

$$c_n=\frac{\int_a^b r(x) f(x) y_n(x) dx}{\|y_n(x)\|^2}, \quad \|y_n(x)\|^2=\int_a^b r(x) y_n^2(x) dx. \tag{4}$$

Величина $\|y_n(x)\|^2$ носит название квадрата нормы собственной функции $y_n(x)$.

Разложения функций в ряды по ортогональным системам функций в физических задачах принято называть спектральными. В этом смысле ряд (3) является примером спектрального разложения. В частности, часто используется представление процесса в виде совокупности простых гармонических колебаний. При этом коэффициенты разложения c_n имеют смысл амплитуд спектральных составляющих, а собственные значения λ_n определяют их частоты.

Поясним способ нахождения коэффициентов разложения c_n. Предположим, что функция $f(x)$ представлена в виде разложения в бесконечный ряд с неизвестными коэффициентами

$$f(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)+\ldots+c_n y_n(x)+\ldots$$

Для нахождения каждого из коэффициентов c_n умножим обе части этого равенства на функцию $r(x)y_n(x)$ и проинтегрируем на отрезке $[a,b]$. Поскольку по условиям теоремы ряд сходится абсолютно и равномерно, то такая процедура почленного интегрирования допустима. В результате имеем

$$\int_a^b r(x)f(x)y_n(x)dx = c_1\int_a^b r(x)y_1(x)y_n(x)dx +$$
$$+c_2\int_a^b r(x)y_2(x)y_n(x)dx + \ldots + c_n\int_a^b r(x)y_n^2(x)dx + \ldots$$

Из всех интегралов в правой части, вследствие свойства ортогональности собственных функций $y_n(x)$, отличен от нуля только интеграл при коэффициенте c_n. В силу этого получаем соотношение (4).

З а м е ч а н и е . Свойство ортогональности и выражение для квадрата нормы в (4) часто представляют с помощью равенства

$$\int_a^b r(x)y_n(x)y_m(x)dx = \|y_n(x)\|^2 \delta_{nm}, \qquad (5)$$

где $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ – так называемый дельта-символ Кронекера.

П р и м е р . Рассмотрим краевую задачу

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,$$
$$y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi).$$

Здесь, в отличие от ранее разобранных случаев, однородные граничные условия заменены на требования периодичности неизвестной функции и ее производной. Общее решение уравнения представляется в виде $y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$. Из условий задачи вытекает

$$A = A\cos\sqrt{\lambda}2\pi + B\sin\sqrt{\lambda}2\pi,$$
$$B = -A\sin\sqrt{\lambda}2\pi + B\cos\sqrt{\lambda}2\pi,$$

Нетрудно заметить, что оба соотношения удовлетворяются при значениях $\sqrt{\lambda} = n$, $n = 0,1,2,\ldots$ Поэтому собственные функции имеют вид $y_n(x) = A_n\cos nx + B_n\sin nx$. Можно показать, что произвольная периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π представима рядом вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right). \qquad (6)$$

Определим коэффициенты этого разложения. Для определения коэффициента a_0 проинтегрируем обе части равенства (6) по промежутку $[0,2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\int_0^{2\pi}\cos nxdx + b_n\int_0^{2\pi}\sin nxdx\right) = 2\pi a_0.$$

Чтобы определить коэффициент a_m, $m \ge 1$, умножим обе части равенства (5) на $\cos mx$ и проинтегрируем по тому же промежутку. Результатом будет

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mxdx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\int_0^{2\pi}\cos nx\cos mxdx + b_n\int_0^{2\pi}\sin nx\cos mxdx\right) = \pi a_m$$

поскольку значения всех интегралов при коэффициентах b_n и a_n, исключая a_m, обращаются в нуль. Аналогично, умножая обе части равенства (5) на $\sin mx$ и интегрируя, получаем

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx = \pi b_m ,$$

Таким образом, при достаточно общих условиях произвольную периодическую функцию с периодом 2π можно разложить в ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx .$$

Этот ряд носит название тригонометрического ряда Фурье и имеет исключительно важное значение при рассмотрении широкого круга задач науки и техники.

3. Неоднородная краевая задача. Функция Грина

3.1. Существование и единственность решения неоднородной краевой задачи

Пусть задано уравнение

$$L[y(x)] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] - q(x)y(x) = 0$$

с однородными граничными условиями

$$\alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=0, \quad \alpha_1^2+\beta_1^2>0, \tag{7}$$
$$\alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=0, \quad \alpha_2^2+\beta_2^2>0.$$

Это есть задача Штурма-Лиувилля с параметром $\lambda=0$. Будем предполагать, что эта однородная задача имеет только тривиальное решение, т.е. $\lambda=0$ не является ее собственным значением. При этих допущениях неоднородная задача

$$L[y(x)]=f(x). \tag{8}$$

с теми же однородными граничными условиями (7) имеет единственное решение (если, конечно, ее решение существует). Действительно, пусть существует два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда, в силу линейности оператора Штурма-Лиувилля и граничных условий, разность этих функций удовлетворяет однородному уравнению, которое, по предположению, имеет только тривиальное решение. Отсюда и следует единственность решения. Ответ на вопрос о существовании решения неоднородной задачи будет нами получен, если удастся построить алгоритм его нахождения.

3.2. Понятие функции Грина

Будем искать решение уравнения (8) с граничными условиями (7) в виде

$$y(x)=\int_a^b f(s)G(x,s)ds, \tag{9}$$

где $G(x,s)$ – некоторая функция, удовлетворяющая тем же самым граничным условиям, что и искомая функция $y(x)$. Если представление (9) существует, то после нахождения явного вида функции $G(x,s)$ оно позволяет получать решение задачи при произвольной правой части $f(x)$.

Подставим (9) в уравнение (8). Поскольку интегрирование проводится по переменной s, а дифференциальный оператор применяется к функции, зависящей от переменной x, а также в силу линейности оператора L, можно поменять порядок дифференцирования и интегрирования

$$\int_a^b f(s)L[G(x,s)]ds = f(x).$$

Последнее уравнение обратится в тождество, если функция $G(x,s)$ будет удовлетворять уравнению

$$L[G(x,s)] = \delta(x-s), \qquad (10)$$

где функция $\delta(x-s)$ обладает свойством

$$\int_a^b f(s)\delta(x-s)ds = f(x). \qquad (11)$$

Равенство (11) должно иметь место при любом значении $x \in [a,b]$. Это требование выполняется, если отличный от нуля вклад в значение интеграла дает бесконечно малая окрестность точки $s = x$, т.е. вне этой окрестности $\delta(x-s) = 0$. Для того, чтобы интеграл по бесконечно малой окрестности принимал конечное значение, необходимо, чтобы $\delta(x-s) \to \infty$ в точке $s = x$. В пределах этой окрестности функция $f(s)$ сохраняет постоянное значение $f(x)$, которое может быть вынесено за знак интеграла. В результате получаем

$$\int_a^b \delta(x-s)ds = 1. \qquad (12)$$

Введенная таким образом функция носит название дельта-функции Дирака.

Вернемся к решению уравнения (10). Проинтегрируем обе его части по переменной x на отрезке $[s-\varepsilon, s+\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG(x,s)}{dx}\right]dx - \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} q(x)G(x,s)dx = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \delta(x-s)dx = 1,$$

или

$$p(s+\varepsilon)G'(s+\varepsilon,s) - p(s-\varepsilon)G'(s-\varepsilon,s) - \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} q(x)G(x,s)dx = 1.$$

Перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$, предполагая при этом, что функция $G(x,s)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке. В результате приходим к равенству

$$\frac{d}{dx}G(x,s)\Big|_{x=s+0}-\frac{d}{dx}G(x,s)\Big|_{x=s-0}=\frac{1}{p(s)}.$$

Функция $G(x,s)$, удовлетворяющая вышеперечисленным условиям, называется функцией Грина задачи (8), (7).

Остановимся на физической интерпретации рассматриваемых функций. При формулировке неоднородной задачи правая часть $f(x)$ обычно задает плотность распределения внешнего воздействия. В случае уравнения (10) это воздействие имеет характер возмущения, сосредоточенного в одной точке, плотность которого в ней бесконечна (так называемый точечный источник). Тогда функция Грина, которая является решением уравнения (10), описывает реакцию физической системы при воздействии на нее точечного источника. В таком случае представление решения неоднородной задачи (8) в форме (9) можно трактовать как суперпозицию реакций системы на совокупность воздействий точечных источников, составляющих реальный источник возмущения.

4. Методы построения функции Грина

4.1. Построение функции Грина на основе фундаментальной системы решений однородного уравнения

Мы показали, что функция Грина является решением следующей краевой задачи

$$L[G(x,s)]=\delta(x-s),\ x,s\in[a,b],$$
$$\alpha_1 G'(a,s)+\beta_1 G(a,s)=0,\ \alpha_2 G'(b,s)+\beta_2 G(b,s)=0,$$
$$G(x,s)\Big|_{x=s+0}-G(x,s)\Big|_{x=s-0}=0,\ G'(x,s)\Big|_{x=s+0}-G'(x,s)\Big|_{x=s-0}=\frac{1}{p(s)}.$$

В силу свойств дельта-функции Дирака уравнение для функции Грина является однородным всюду, кроме точки $x=s$. На интервале $[a, s)$ его общее решение может быть представлено в виде $G(x,s) = A_1 y_1(x) + B_1 y_2(x)$, где $y_1(x), y_2(x)$ – независимые частные решения уравнения. Граничное условие при $x = a$ позволяет выразить одну из произвольных постоянных, например B_1, через другую. В результате выражение для функции Грина примет следующий вид

$$G(x,s) = A_1 u_1(x),$$

где $u_1(x)$ – частное решение, обеспечивающее выполнение граничного условия при $x = a$. Выполняя аналогичную процедуру на интервале $(s, b]$, получим

$$G(x,s) = A_2 u_2(x),$$

где $u_2(x)$ – частное решение, удовлетворяющее граничному условию при $x = b$.

Неизвестные постоянные A_1 и A_2 определим, исходя из поведения функции Грина и ее производной в точке $x = s$. Имеем систему уравнений

$$A_1 u_1(s) - A_2 u_2(s) = 0,$$

$$A_1 u_1'(s) - A_2 u_2'(s) = -\frac{1}{p(s)}.$$

Определитель этой системы является вронскианом решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в точке $x = s$ и поэтому отличен от нуля. Определив из системы коэффициенты A_1 и A_2 и подставив их значения в выражения для функции Грина на соответвующих интервалах, получим

$$G(x,s) = \frac{1}{p(s) W(s)} \begin{cases} u_1(x) u_2(s), & x \in [a, s], \\ u_1(s) u_2(x), & x \in [s, b], \end{cases} \qquad (13)$$

где вронскиан $W(x) = u_1(x) u_2'(x) - u_1'(x) u_2(x)$.

Из формулы (13), в частности, следует, что функция Грина симметрична относительно перестановки аргументов, т.е. $G(x,s) = G(s,x)$.

П р и м е р . Найдем функцию Грина, являющуюся решением следующей краевой задачи

$$G''(x,s)=\delta(x-s),\ x,s\in[0,b],$$

$$G(0,s)=0,\ G'(b,s)=0.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения на интервале $[0,s)$ имеет вид $G(x,s)=A_1x+B_1$. Из граничного условия при $x=0$ следует, что $B_1=0$, поэтому в данном случае частное решение $u_1(x)=x$. Записывая общее решение однородного уравнения на интервале $(s,b]$ и используя затем граничное условие при $x=b$, приходим к выводу, что частное решение $u_2(x)=1$. Вронскиан этих решений равен -1. Значение коэффициента $p(s)=1$. Поэтому согласно общей формуле (13) функция Грина представима в виде

$$G(x,s)=\begin{cases}-x, & x\in[0,s],\\ -s, & x\in[s,b].\end{cases}$$

Из этого выражения нетрудно видеть, что в точке $x=s$ функция Грина непрерывна, а ее первая производная по аргументу x испытывает скачок, равный единице.

4.2. Спектральное представление функции Грина

Пусть задана задача Штурма-Лиувилля

$$L[y(x)]+\lambda r(x)y(x)=0,\ x\in[a,b],$$

$$\alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=0,\ \alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=0$$

и мы нашли ее собственные значения λ_n и соответствующие им собственные функции $y_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$ Предположим теперь, что нам необходимо найти функцию Грина $G(x,s)$, являющуюся решением следующей задачи

$$L[G(x,s)]+\lambda r(x)G(x,s)=\delta(x-s),\; x,s\in[a,b],$$
$$\alpha_1 G'(a,s)+\beta_1 G(a,s)=0,\; \alpha_2 G'(b,s)+\beta_2 G(b,s)=0$$

в виде разложения по собственным функциям $y_n(x)$:

$$G(x,s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)y_n(x).$$

Подставляя это разложение в уравнение для функции Грина и предполагая возможность почленного дифференцирования ряда, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)L[y_n(x)]+\lambda r(x)\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)y_n(x)=\delta(x-s).$$

Согласно определению собственных функций

$$L[y_n(x)]=-\lambda_n r(x)y_n(x),$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)r(x)y_n(x)[\lambda-\lambda_n]=\delta(x-s).$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов разложения умножим обе части последнего равенства на функцию $y_m(x)$ и проинтегрируем полученное соотношение на отрезке $[a,b]$. Результатом будет

$$\int_a^b y_m(x)\delta(x-s)dx=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)[\lambda-\lambda_n]\int_a^b r(x)y_n(x)y_m(x)dx.$$

В силу условия ортогональности (5) и свойства (11) дельта-функции получим

$$y_m(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)[\lambda-\lambda_n]\delta_{nm}\|y_n(x)\|^2.$$

Поскольку символ Кронеккера отличен от нуля только при $n=m$, то от всей суммы остается единственное слагаемое, и поэтому

$$a_m(s) = \frac{y_m(s)}{[\lambda - \lambda_m]\|y_m(x)\|^2} .$$

Таким образом, разложение для функции Грина имеет вид

$$G(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n(s)}{[\lambda - \lambda_n]\|y_n(x)\|^2} . \qquad (14)$$

Эта формула также показывает, что функция Грина симметрична относительно своих аргументов.

Пример. Найдем спектральное разложение функции Грина, являющейся решением следующей задачи

$$G''(x,s) + \lambda G(x,s) = \delta(x-s), \; x, s \in [0,b],$$

$$G(0,s) = 0 , \; G'(b,s) = 0 .$$

Собственные значения и собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля были найдены нами в пункте 1

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right).$$

Поэтому согласно формуле (14) разложение для $G(x,s)$ имеет вид

$$G(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x \sin \lambda_n s}{[\lambda - \lambda_n]\|\sin \lambda_n x\|^2} ,$$

где квадрат нормы

$$\|\sin \lambda_n x\|^2 = \int_0^b \sin^2 \lambda_n x dx = \frac{1}{2}\int_0^b (1 - \cos 2\lambda_n x) dx = \frac{b}{2} .$$

Рассмотренное здесь спектральное представление функции Грина по существу демонстрирует возможность получения решения (9) неоднородной задачи в виде разложения по собственным функциям однородной задачи. Отсюда можно заключить, что решение однородной задачи описывает совокупность всех возможных состояний физической системы; задание конкретного вида внешнего воздействия, определяемого правой частью неоднородного уравнения (8), приводит к выделению интересующего нас состояния.

Область применения методов, рассмотренных в настоящих методических указаниях, на самом деле значительно шире. Решение самых разнообразных физических проблем как раз и базируется на идеях разложения искомой функции по подходящей системе ортогональных функций или представления ее в интегральном виде. Среди наиболее известных методов укажем метод интегральных преобразований, метод моментов, различные методы теории возмущений. Краевые задачи и в настоящее время являются источников новых плодотворных идей, находящих иногда весьма нетрадиционное применение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4. Ч.2. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1981. – 550 с.
2. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит.,1966. – 444 с.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
4. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения – М.: Наука – Физматлит, 1998. – 232 с.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания // Томский государственный университет.
Томск, 2004. 23 с.

Подп. в печать Тираж экз.

Заказ № РИО ТГУ Томск, пр. Ленина, 36-023.